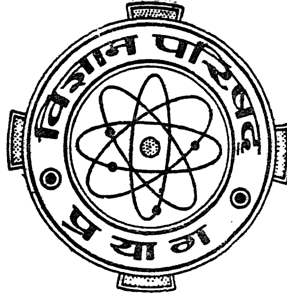
Vijnana Parishad
Anusandhan Patrika
विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 23 | January 1980 | No. 1



The Research Journal of the Hindi Science Academy
Vijnana Parishad, Maharshi Dayanand Marg, Allahabad, India

$$[1+(-1)^{q+1}]\, e^{-K_1 B_1 t} \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi z}{c}\right)$$

$$+\frac{8}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{K_2 n}{B_1 q(b^2 K'^2 + n^2\pi^2)} [1+(-1)^{n+1} e^{-bK_1}] [1+(-1)^{q+1}]$$

$$(1-e^{-K_1 B_1 t}) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi z}{c}\right)$$

$$+\frac{8H}{b\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n-1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{K_3}{mqB_1} [1+(-1)^{m+1}] (1-e^{K_1 B_1 t}) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi}{c}\right)$$

$$+\frac{8r}{c\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{K_4}{mn\, B_1} [1+(-1)^{n+1}] (1-e^{-K_1 Bt}) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sip}\left(\frac{n\pi)}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi z}{c}\right)$$

$$+\frac{8}{abc} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{A}{B_1} (1-e^{-K_1 B_1 t}) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi z}{c}\right)$$

$$+\frac{8a}{\pi^2} \sum_{m=4}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{m[K_1 B_1 \sin\left(\frac{m\pi v}{a}\right) t - \left(\frac{m\pi v}{a}\right) \cos\left(\frac{m\pi v}{a}\right) t + \left(\frac{m\pi v}{a}\right) e^{-K_1 B_1 t}]}{nq(a^2 K_1^2 B_1^2 + m^2\pi^2 v^2)}$$

$$[1+(-1)^{n+1}] [1+(-1)^{q+1}] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin\left(\frac{q\pi z}{c}\right) \qquad (44)$$

(iv) यदि हम मान लें कि समान्तर षटफलक के प्रत्येक फलन का ताप शून्य हो और उसके भीतर कोई उष्मा स्रोत न रहे तो (3·18) इससे पूर्व प्राप्त स्नेडान[2] के फल में समानीत हो जाता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय एम० आर० इंजीनियरी कालेज, जयपुर के डा० के० सी० गुप्ता के कृतज्ञ हैं जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया और सहायता पहुँचाई।

निर्देश

1. हूगेन, ओ० ए०, मककौले, एच० जे० तथा मार्शल, डब्लू० आर० जूनियर, **ट्रांजे० अमे० इंस्टी० केमि० इंजीनि०**, 1940, **36**, 183-209.

2. स्नेडान, आई० एन०, Fourier Transform, मेकग्राहिल न्यूयार्क, 1951, पृष्ठ 80, 81, 530, 189.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 1, January, 1980, Pages 9-15

लैप्लास तथा वर्मा परिवर्तों पर कुछ प्रमेय

के० एस० सेवारिया
गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, अजमेर

[प्राप्त—जुलाई 24, 1978]

सारांश

इस प्रपत्र का उद्देश्य लैप्लास तथा वर्मा के परिवर्तों पर कुछ प्रमेय सिद्ध करना और इन प्रमेयों के सम्प्रयोग द्वारा सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलनों एवं लैप्लास फलन वाले अनन्त समाकलों का मान ज्ञात करना है ।

Abstract

Some theorems on Laplace and Varma transforms. *By* K. S. Sevaria, Department of Mathematics, Government College, Ajmer.

The object of this paper is to prove some theorems on Laplace and Varma transforms and by making use of these theorems we have evaluated infinite integrals involving generalised hypergeometric function and Legendre function.

1. प्रस्तावना

फलन $f(t)$ के लैप्लास तथा वर्मा परिवर्तों को

$$\phi(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt \tag{1}$$

तथा

$$\psi(p) = p \int_0^\infty e^{-1/2pt} (pt)^{m-1/2} W_{k,m}(pt) f(t)\, dt \tag{2}$$

द्वारा परिभाषित किया है और संकेत के रूप में उन्हें क्रमशः $\phi(p) \doteq f(t)$ एवं $\psi(p) \underset{k,m}{\overset{V}{=}}$ के रूप में अंकित किया जाता है ।

2. प्रमेय 1

यदि $\phi(p) \doteqdot f(t)$

तथा $\psi(p) \frac{V}{k,\, m}\, t^{\rho-m-1/2}\, e^{-\alpha t} f(t)$

तो $$\psi(p) = p^{m+1/2} \int_0^\infty (t+\alpha)^{-1}\, t^{-\rho}\, G_{22}^{02}\left(\frac{t}{p} \Big/ \begin{matrix} \frac{1}{2}-m,\ \frac{1}{2}+m \\ k,\ \rho \end{matrix}\right) \phi(t+\alpha)\, dt \tag{3}$$

बशर्ते कि समाकल अभिसारी हो तथा $|ft\, x|$ का लैप्लास परिवर्त एवं $|t^{\rho-m-1/2}\, e^{-\alpha t} f(t)|$ का वर्मा परिवर्त विद्यमान हो और $p>0,\ R(\alpha)>0$.

उपपत्ति

चूँकि $\phi(p) \doteqdot f(t)$,

$$e^{-\alpha t} f(t) \doteqdot p(p(+\alpha)^{-1}\, \phi(p+\alpha) \tag{4}$$

क्योंकि $R(p)>0,\ R(\alpha)>0.$

[6, p. 400(11)] को लेने तथ सम्बन्ध [1. p. 221(68)] को सम्प्रयुक्त करने पर

$$t^{-\rho}\, G_{22}^{02}\left(\frac{t}{c} \Big/ \begin{matrix} \frac{1}{2}-m,\ \frac{1}{2}+m \\ k,\ \rho \end{matrix}\right)$$

$$\doteqdot p^{\rho}\ G_{12}^{20}\left(cp \Big/ \begin{matrix} 1-k \\ \frac{1}{2}+m,\ \frac{1}{2}-m \end{matrix}\right)$$

$$= p^{\rho}\, e^{-1/2cp}\, W_{k,m}(cp) \tag{5}$$

क्योंकि $R(p)>0,\ c>0.$

पार्सेवाल प्रमेय में (4) तथा (5) का उपयोग करने पर जिससे कि यदि

$\phi(p) \doteqdot f(t)$ तथा $\psi(p) \doteqdot g(t)$

तो $$\int_0^\infty \phi(t)\, g(t)\, t^{-1}\, dt = \int_0^\infty \psi(t)\, f(t)\, t^{-1}\, dt$$

हमें प्राप्त होगा

$$\int_0^\infty e^{-\alpha t}\, t^{\rho-1}\, e^{-1/2ct}\, W_{k,m}(ct)\, f(t)\, dt$$

$$=\int_0^{r} t^{-\rho}\,(t+\alpha)^{-1}\,G_{22}^{02}\left(\frac{t}{c}\;\begin{matrix}\frac{1}{2}-m,\ \frac{1}{2}+m\\ k,\ \rho\end{matrix}\right)\phi(t+\alpha)\,dt \qquad (6)$$

c को p द्वारा प्रतिस्यपित करने एवं (2)का उपयोग करने पर हमें (3) प्राप्त होगा।

उदाहरण

[2, p. 216(14)] को लेने पर

$$f(t)=t^{l-1}\,e^{1/2(\alpha+\beta)t}\,M_{\lambda,\nu}(\alpha t)\,M_{\sigma,\mu}(\beta t)$$

$$\doteq \frac{\alpha^{\nu-1/2}\,\beta^{\mu+1/2}\,\Gamma(l+\mu+\nu+1)}{p^{l+\mu+\nu}}F_2\left[l+\mu+\nu+1;\ \tfrac{1}{2}+\nu-\lambda,\ \tfrac{1}{2}+\mu-\sigma;1+2\nu,\ 1+2\mu;\frac{\alpha}{p},\frac{\beta}{p}\right]$$

$$=\phi(p),\ R(p)>0,\ R(p-\alpha)>0,\ R(p-\alpha-\beta)>0,\ R(p-\beta)>0,\ R(l+\mu+\nu+\beta)>0.$$

तो हमें [4, p. 226(2·2)]

$$t^{\rho-m-1/2}\,e^{-\alpha t}f(t)=t^{\rho+l-m-3/2}\,e^{-1/2(\alpha-\beta)t}\,M_{\lambda,\nu}(\alpha t)\,M_{\sigma,\mu}(\beta t)$$

$$\sum_{k,m}\frac{\alpha^{\nu+1/2}\,\beta^{\mu+1/2}\,\Gamma(\mu+\nu+\rho+l\pm m+\frac{1}{2})}{p^{\mu+\nu+\rho+l-m-1/2}\,\Gamma(\mu+\nu+\rho+l-k+1)}$$

$$\times F^{(6)}\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}+\mu+\nu+\rho+l\pm m:\ \frac{1}{2}-\sigma+\mu,\ \frac{1}{2}+\lambda+\nu\\ 1-k+\mu+\nu+\rho+l:\ 1+2\mu,\ 1+2\nu\end{matrix};\ \frac{\beta}{p},-\frac{\alpha}{p}\right]$$

$$=\psi(p)$$

जहाँ $R(\alpha)>0,\ R(p)>R(\beta),\ R(l+\rho+\mu+\nu-\frac{1}{2})>0$, तथा द्विगुण सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय श्रेणी प्राप्त होगा

$$F^{(6)}\left[\begin{matrix}a,\ b:\ d,\ e\\ c:\ f,\ g\end{matrix};\ x,\ y\right]=\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\frac{(a)_{r+s}(b)_{r+s}(d)_r(e)_s}{(c)_{r+s}(f)_r(g)_s(r)!\,(s)!}\,x^r\,y^s$$

उच्च कोटि के दो चरों वाले कैम्पे द फेरी के हाइपरज्यामितीय फलन की विशिष्ट दशा है और उनके संकेतन में निम्न प्रकार से संकेतित है

$$\left[\begin{array}{c|c|c}2 & c,\ d & \\ 1 & a,\ b & x\\ 1 & e & y\\ 1 & f,\ g & \end{array}\right]$$

प्रमेय 1 को व्यवहृत करने पर हमें

$$\int^{\infty} t^{-\rho}(t+\alpha)^{-l-\nu-\mu-1} \; G_{22}^{02}\left(\frac{t}{p} \;\middle|\; \begin{matrix} \frac{1}{2}-m, \frac{1}{2}+m \\ k, \rho \end{matrix}\right)$$

$$\times F_2\left[l+\mu+\nu+1; \tfrac{1}{2}+\nu-\lambda, \tfrac{1}{2} \quad \mu-\sigma; 1+2\nu, 1+2\mu; \frac{\alpha}{(t+\alpha)}, \frac{\beta}{(t+\alpha)}\right] dt$$

$$=\frac{\Gamma(\frac{1}{2}+\mu+\nu+\rho+l\pm m)}{p^{\mu+\nu+\rho+l}\,\Gamma(1+\mu+\nu+\rho+l-k)\Gamma(1+\mu+\nu+l)}$$

$$\times F^{(6)}\left[\begin{matrix}\frac{1}{2}+\mu+\nu+\rho+l\pm m: \frac{1}{2}-\sigma+\mu, \frac{1}{2}+\lambda+\nu \\ 1+\mu+\nu+\rho+l-k: 1+2\mu, 1+2\nu\end{matrix}; \frac{\beta}{p}, -\frac{\alpha}{p}\right]$$

प्राप्त होता है क्योंकि $R(\frac{1}{2}+\mu+\nu+\rho+l\pm m)>0, p>\beta, \alpha>0$

$\alpha=0$ रखने एवं सम्बन्ध [3, p. 443]

$${}_2F_1[a, b; c; -x]=\frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \; G_{22}^{12}\left(x \;\middle|\; \begin{matrix} 1-a, 1-b \\ 0, 1-c \end{matrix}\right)$$

का सम्प्रयोग करने पर हमें ज्ञात फल [3, p. 422(14)] प्राप्त होता है ।

प्रमेय 2

यदि $\phi(p)\doteq f(t)$

तथा $\psi(p)\doteq t^{\rho-1}\, e^{-1/2ct}\, W_{k,m}(ct)\, f(t)$

तो
$$\psi(p)=p \int_0^{\infty} t^{-\rho}(t+p)^{-1} \; G_{22}^{02}\left(\frac{t}{c} \;\middle|\; \begin{matrix} \frac{1}{2}-m, \frac{1}{2}+m \\ k, \rho \end{matrix}\right) \phi(t+p)\, dt \tag{7}$$

बशर्ते कि समाकल अभिसारी हो और $|f(t)|$ तथा $|t^{\rho-1}\, e^{-1/2ct}\, W_{k,m}(ct)\; f(t)|$ को लैप्लास परिवर्त विद्यमान हों तथा $R(p)>0, c>0$.

उपपत्ति

(6) में α के स्थान पर p रखने एवं (1) एक का उपयोग करने पर हमें (7) की प्राप्ति होगी ।.

उदाहरण 1

[2, p. 216(14)] लेने पर

$$f(t)=t^{\sigma-1} \prod_{r=1}^{n} [M_{k_r,\mu_r}(a_r t)]$$

$$\doteq p a_1^{1/2+\mu_1} \dots a_n^{1/2+\mu_n} (p+b)^{-\sigma-N} \Gamma(\sigma+N)$$

$$\times F_A\left(\sigma+N; \tfrac{1}{2}+\mu_1-k_1, \dots, \tfrac{1}{2}+\mu_n-k_n; 1+2\mu_1, \dots, 1+2\mu_n; \frac{a_1}{p+}, \dots, \frac{a_n}{p+b}\right)$$

$$=\phi(p),\ R(\sigma+N)>0,\ R(p\pm\tfrac{1}{2}a_1\pm\dots\pm\tfrac{1}{2}a_n)>0,\ b=\tfrac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}(a_r),\ N=\tfrac{1}{2}n+\sum_{r=1}^{n}(\mu_r),$$

तो हमें ज्ञात फल [2, p. 216(14)] में कुछ परिवर्धन के साथ

$$t^{\rho-1} e^{-1/2ct} W_{k,m}(ct) f(t)$$

$$=t^{\sigma+\rho-2} e^{-1/2ct} W_{k,m}(ct) \prod_{r=1}^{n} [M_{k_r,\mu_r}(a_r t)]$$

$$\doteq \sum_{m,-m} \frac{\Gamma(-2m)\Gamma(\sigma+\rho+N+m-\frac{1}{2})\ p a_1^{1/2+\mu_1} \dots a_n^{1/2+u_n} c^{1/2+m}}{\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)(p+b+c)^{\sigma+\rho+N+m-1/2}}$$

$$\times F_A\left[\sigma+\rho+N+m-\tfrac{1}{2}; \tfrac{1}{2}+\mu_1-k_1, \dots, \tfrac{1}{2}+\mu_n-k_n, \tfrac{1}{2}+m-k; 1+2\mu_1, \dots,\right.$$

$$\left. 1-2\mu_n, 1+2m; \frac{a_1}{(p+b+c)}, \dots \frac{a_n}{(p+b+c)}, \frac{c}{(p+b+c)}\right]$$

$$=\psi(p)$$

क्योंकि $R(\sigma+\rho+N\pm m-\frac{1}{2})>0$, $R(p\pm\frac{1}{2}a_1\pm\dots\pm\frac{1}{2}a_n+c)>0$, $b=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}(a_r)$, $R_2p(\pm\frac{1}{2}a_1\pm\dots\pm\frac{1}{2}a_n)>0$, $N=\frac{1}{2}n+\sum_{r=1}^{n}(\mu_r)$.

प्रमेय 2 के सम्प्रयोग से

$$\int_0^\infty t^{-\rho}(t+p+b)^{-\sigma-N} \cdot G_{22}^{02}\left(\frac{t}{c} \middle/ \begin{matrix}\frac{1}{2}-m, \frac{1}{2}+m \\ k, \rho\end{matrix}\right)$$

$$\times F_A\left[\sigma+N; \tfrac{1}{2}+\mu_1-k_1, \dots, \tfrac{1}{2}+\mu_n-k_n; 1+2\mu_1, \dots, 1+2\mu_n; \right.$$

$$\left. \frac{a_1}{(t+p+b)}, \dots, \frac{a_8}{(t+p+b)}\right] dt$$

$$= \sum_{m,-m} \frac{\Gamma(-2m)\Gamma(\sigma+\rho+N+m-\frac{1}{2})\ c^{m+1/2}}{\Gamma(\sigma+N)\Gamma(\frac{1}{2}-k-m)(p+b+c)^{\sigma+\rho+N+m-1/2}}$$

$$\times F_A\Big[\sigma+\rho+N+m-\tfrac{1}{2};\ \tfrac{1}{2}+\mu_1-k_1,\ \ldots,\ \tfrac{1}{2}+\mu_n-k_n,\ \tfrac{1}{2}+m-k;\ 1+2\mu_1,\ \ldots,$$

$$1+2\mu_n,\ 1+2m;\frac{a_1}{(p+b+c)},\ \ldots,\ \frac{a_n}{(p+b+c)}\ ;\ \frac{c}{(p+b+c)}\Big]$$

क्योंकि $R(\sigma+\rho+N\pm m-\frac{1}{2})>0,\ b=\frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n}(a_r),\ N=\frac{1}{2}n+\sum_{r=1}^{n}(\mu_r),\ p>b,\ c>0, a_r>0(r=1,\ldots,$ $n)$. $a_r=0,\ (r=1,\ \ldots,\ n)$ रखने पर हमें ज्ञात फल [3, p. 237(33)] की प्राप्ति होती है ।

उदाहरण 2

यदि [5, p. 342] लें

$$f(t)=t^{k-\rho}\ I_\nu(\gamma t)$$

$$\doteqdot \frac{2^{1/2}p}{\pi^{1/2}\ \gamma^{1/2}\ (p^2-\gamma^2)^{1/4+1/2k-1/2\rho}}\ Q_{\nu-1/2}^{k-\rho+1/2}\left(\frac{p}{\gamma}\right)$$

$$=\phi(p),\ R(k-\rho+\nu+1)>0,\ R(p)>|\ R(\gamma)\ |$$

तो हमें मिलेगा [7, p. 175(5)]

$$t^{\rho-1}\ e^{-1/2ct}\ W_{k,m}(ct)\,f(t)$$

$$=t^{k-1}\ e^{-1/2ct}\ W_{k,m}(ct)\ I_\nu(\gamma t)$$

$$\doteqdot \frac{\gamma^{\nu}p\ \Gamma(\frac{1}{2}+k\pm m+\nu)}{2^{\nu}\ c^{k+\nu}\ [\Gamma(1+\nu)]^2}\ F_4\Big[\ \tfrac{1}{2}+k-m+\nu,\ \tfrac{1}{2}+k+m+\nu;\ \nu+1.\ \nu+1;$$

$$-\frac{p+(p^2-\gamma^2)^{1/2}}{2c},\ -\frac{p-(p^2-\gamma^2)^{1/2}}{2c}\Big]$$

$$=\psi(p)$$

क्योंकि $R(k\pm m+\nu+\frac{1}{2})>0,\ R(c+p\pm\gamma)>0.$

प्रमेय 2 के सम्प्रयोग से तथा p के स्थान पर a^2+b^2, γ के स्थान पर $2ab$, $\frac{1}{2}+k-m$ के स्थान पर α, $\frac{1}{2}+k+m$ के स्थान पर β, ρ के स्थान पर $\rho+k$ रखने पर हमें अन्ततः

$$\int_0^\infty t^{-\rho}\ \{(t+a^2+b^2)^2-4a^2b^2\}^{1/2\rho-1/4}\ Q_{\nu-1/2}^{-\rho+1/2}\left(\frac{t+a^2+b^2}{2ab}\right)$$

$$\times G_{22}^{02}\left(\frac{t}{c}\Big/\begin{matrix}\frac{1}{2}-m-k,\ \frac{1}{2}+m-k\\ 0,\ \rho\end{matrix}\right)dt$$

$$=\frac{\pi^{1/2}(ab)^{\nu+1/2}\Gamma(\alpha+\nu)\Gamma(\beta+\nu)}{c^{\nu}\Gamma(1+\nu)\Gamma(1+\nu)}\ F_4\Big[\alpha+\nu,\ \beta+\nu;\ \nu+1,\ \nu+1;\ -\frac{b^2}{c},\ -\frac{a^2}{c}\Big]$$

प्राप्त होगा क्योंकि $R(\alpha+\nu)>0,\ R(\beta+\nu)>0,\ a>0, b>0,\ c>0,$

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transcendental functions, भाग I, मैकग्राहिल न्यूयार्क, 1953.

2. वही, Tables of Integral transforms, भाग I, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1954

3. वही, Tables of Integral transform भाग II, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1954.

4. कुलश्रेष्ठ, एस० के०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया,** 1966, **36**A, 225-229.

5. मैकराबर्ट, टी० एम०, Spherical Harmonics, Methuen 1947.

6. सक्सेना, आर० के०, **प्रोसी० नेश० एके० सांइस इंडिया**, 1960, **26**A, 400-413.

7. वही, **प्रोसी० कैम्ब्रिज फिला० सोसा०**, 1964, **60**, 174-176.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 1, January, 1980, Pages 17-24

बहुपद समुच्चय Sn (x,y) के लिये आवर्तन सम्बन्ध

रामजी सिंह तथा आर० एन० पाण्डेय

सम्प्रयुक्त गणित अनुभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त— नवम्बर 14, 1977]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य सार्वीकृत बहुपद समुच्चय $S_n(x, y)$ के लिये कतिपय आवर्तन सम्बन्ध प्राप्त करना है ।

Abstract

Recurrence relations for the polynomial set S_n (x. y). *By* Ramji Singh and R. N. Pandey, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

The present note aims at deriving a few recurrence relations for the generalized polynomial set $S_n(x, y)$, of order n, defined in [5] by means of a generating function.

1. प्रस्तावना

एक पूर्ववर्ती प्रपत्र[5] में 25 लाम्बिक तथा अलाम्बिक बहुपदों के सार्वीकरण स्वरूप एक सार्वीकृत बहुपद समुच्चय $S_n(x, y)$ को जनक फलन

$$Pe^{-\lambda t^{m_1}}(1-\nu x^{-m}t^m)^{-\alpha}H_{p,q+1}^{l_1,l_2}\left[\frac{-\mu y^{m_2}t}{(1-\nu x^{-m}t^m)^{\beta}}\middle|\begin{matrix}\{(a_p,A_p)\}\\(b_1,1),\{(b_{q+1},B_{q+1})\}\end{matrix}\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}S_{n;\beta;\nu;(b_{q+1},B_{q+1});l_1}^{\lambda;m_1;m;\alpha;\mu;(a_p,A_p);l_2:m_2}(x,y)t^n, \tag{1.1}$$

की सहायता से परिभाषित किया गया है : जहाँ $\mu\neq0$, $\nu\neq0$, α,β, λ वास्तविक हैं, m एवं $m_h(h=1,2)$ धन पूर्णांक हैं,

$$\sum_{j=1}^{p} A_j - \sum_{j=2}^{q+1} B_j \leqslant 1,$$

$$\sum_{j=1}^{l_2} A_j - \sum_{j=l_2+1}^{p} A_j + \sum_{j=2}^{l_1} B_j - \sum_{j=l+1}^{q+1} B_j + 1 \equiv \lambda' > 0,$$

$$\left| arg \frac{\mu y^{m}{}_2 t}{(1-\nu x^{-m} t^{m})^{\beta}} \right| < \tfrac{1}{2}\pi\lambda'$$

तथा

$$P = \frac{\prod_{j=l_2+1}^{p} \Gamma(a_j - A_j b_1) \prod_{j=l_1+1}^{q+1} \Gamma(1-b_j+B_j b_1)}{\prod_{j=1}^{l_2} \Gamma(1-a_j+A_j b_1) \prod_{j=2}^{l_1} \Gamma(b_j - B_j b_1)(-\mu y^{m}{}_2 t)^{b_1}}$$

(1.1) के बामपक्ष में फाक्स[2] द्वारा परिभाषित H-फलन रहता है।

उपर्युक्त बहुपद समुच्चय को निम्नलिखित रूप में दिया जाता है :

$$S^{\lambda;m_1:m;\alpha;\mu;(a_p,A_p);l_2;m_2}_{n;\beta;\nu;(b_{q+1},B_{q+1});l_1}(x,y)$$

$$= \sum_{k=0}^{[n/m]} \sum_{s=0}^{[n/m_1]} \frac{(\alpha+\beta b_1)_{(n-mk)p+k-m_1\beta s}\nu^k(-\lambda)^s}{(\alpha+\beta b_1)_{(n-mk)\beta-m_1\beta s}k!s!(n-mk-m_1 s)!} \times$$

$$\frac{[(M(i,j))]_{n-mk-m_1 s}[(1-M_1(i,j))]_{n-mk-m_1 s}(\mu y^{m}{}_2 E)^{n-mk-m_1 s}}{[(N(i,j))]_{n-mk-m_1 s}[(1-N_1(i,j))]_{n-mk-m_1 s}x^{mk}} \quad (1.2)$$

संक्षेपण हेतु हम बहुपद समुच्चय को, जब भी किसी प्राचल में परिवर्तन नहीं होगा, $S_n(x, y)$ द्वारा अंकित करेंगे। यदि बहुपद समुच्चय के किसी भी प्राचल में परिवर्तन होता है तो उस प्राचल विशेष (S) को (अपवाद n) जिसमें परिवर्तन हुआ है, अंकित किया जावेगा। प्रस्तुत प्रपत्र $S_n(x, y)$ के आवर्तन सम्बन्धों के विषय में है। चिरप्रतिष्ठित बहुपदों के कतिपय रोचक परिणाम सामान्य परिणामों की विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त किये गये हैं।

समग्र प्रपत्र में निम्नांकित संकेतनों का व्यवहार किया जावेगा।

(i) $(m)=1,2,3,...,m$

(ii) $(a_p)=a_1,a_2,...,a_p.$

(iii) $[(a_p)]_n=(a_1)_n(a_2)_n(a_3)_n...(a_p)_n.$

(iv) $\triangle(a;b) = \frac{b}{a}, \frac{b+1}{a}, \ldots, \frac{b+a-1}{a}$.

(v) $\triangle_k[a;b] = \prod_{r=1}^{a}\left(\frac{b+r-1}{a}\right) = (b/a)_k\left(\frac{b-1}{a}\right)_k \cdots \left(\frac{b+a-1}{a}\right)_k$

(vi) $[(M(i,j))]_n = \prod_{j=1}^{l_2} \prod_{i=1}^{A_j}\left(\frac{i\quad a_j + A_j b_1}{A_j}\right)_n$.

(vii) $[(1-M_1(i,j))]_n = \prod_{j=l_2+1}^{p} \prod_{i=1}^{A_j}\left(1-\frac{i-1+a_j-A_j b_1}{A_j}\right)_n$

(viii) $[(N(i,j))]_n = \prod_{j=l_1+1}^{q+1} \prod_{i=1}^{B_j}\left(\frac{i\quad b_j + B_j b_1}{B_j}\right)_n$.

(ix) $[(1-N_1(i,j))]_n = \prod_{j=2}^{l_1} \prod_{i=1}^{B_j}\left(1-\frac{i-1+b_j-B_j b_1}{B_j}\right)_n$.

(x) $$E = \frac{(\quad 1)^{\sum_{j=2}^{l_1} B_j}\prod_{i=1}^{p} A_j^{A_j}}{(-1)^{\sum_{j=l+2}^{p} A_j}\prod_{j=2}^{q+1} B_j^{B_j}}$$

(xi) $\triangle^1{}_k[m;1-(M_1,j))\quad n] = \prod_{j=1}^{l_2} \prod_{i=1}^{A_j} \prod_{l=1}^{m}\left(\frac{-(M(i,j))-n+l}{m}\right)_k$

(xii) $\triangle^2{}_k[m;(M_1(i,j))-n] = \prod_{j=l_2+1}^{p} \prod_{i=1}^{A_j} \prod_{l=1}^{m}\left(\frac{(M_1(i,j))-n+l-1}{m}\right)_k$

(xiii) $\triangle^3{}_k[m;1-(N(i,j))-n] = \prod_{j=l_1+1}^{q+1} \prod_{i=1}^{B_j} \prod_{l=1}^{m}\left(\frac{-(N(i,j))-n+l}{m}\right)_k$

(xiv) $\triangle^4{}_k[m;(N_1(i,j))-n]=\prod_{j=2}^{l_1}\prod_{i=1}^{B_j}\prod_{l=1}^{m}\left(\frac{(N_1(i,j))-n+l-1}{m}\right)_k$

(xv) $\triangle^1{}_s[m_1;1-(M(i,j))-n+mk]=\prod_{j=1}^{l_2}\prod_{i=1}^{A_j}\prod_{l=1}^{m_1}\left(\frac{-(M(i,j))-n+mk+l}{m_1}\right)_s$

(xvi) $\Delta^2{}_s[m_1;(M_1(i,j))-n+mk]=\prod_{j=l_2+1}^{p}\prod_{i=1}^{A_j}\prod_{l=1}^{m_1}\left(\frac{(M_1(i,j))-n+mk+l-1}{m_1}\right)_s$

(xvii) $\triangle^3{}_s[m_1;1-(N(i,j))-n+mk]=\prod_{j=l_1+1}^{q+1}\prod_{i=1}^{B_j}\prod_{l=1}^{m_1}\left(\frac{-(N(i,j))-n+mk+l}{m_1}\right)_s$

(xviii) $\triangle^4{}_s[m_1:(N_1(i,j))-n+mk]=\prod_{j=2}^{l_1}\prod_{i=1}^{B_j}\prod_{l=1}^{m_1}\left(\frac{(N_1(i,j))-n+mk+l-1}{m_1}\right)_s$

(xix) बहुपद के प्रसार में प्राचल में $((a_p,A_p),n)$ का तात्पर्य है $(M(i,j))+n,(1-M_1(i,j)+n)$ और आगे भी ।

2. y के प्रति आवर्तन संबंध

(1·2) से हमें निम्नलिखित सम्बन्ध प्राप्त होता है ।

$$S_n^{\xi\ \eta}(x,y)=\sum_{k=0}^{[n/m]}\sum_{s=0}^{[n/m_1]}\frac{(\alpha+\beta b_1)_{(n-mk)\beta+k-m_1\beta s}\nu^k(-\lambda)^s}{(\alpha+\beta b_1)_{(n-mk)\beta-m_1\beta s}k!s!(n-mk-m_1s)!}\times$$

$$\frac{[(M(i,j))]_{n-mk-m_1s}[(1-M_1(i,j))]_{n-mk-m_1s}y^{m_2\eta(n-mk-m_1s)}}{[(N(i,j))]_{n-mk-m_1s}[(1-N_1(i,j))]_{n-mk-m_1s}x^{\xi mk}} \tag{2.1}$$

(2.1) को अंशतः y के प्रति अवकलित करने पर

$$\partial/\partial y\ S_n^{\xi\ \eta}(x,y)=m_2\eta\sum_{k=0}^{[n-1/m]}\sum_{s=0}^{[n-1/m_1]}\frac{(\alpha+\beta b_1)_{(n-mk)\beta+k-m_1\beta s}}{(\alpha+\beta b_1)_{(n-mk)\beta-m_1\beta s}}\times$$

$$\frac{(\nu)^k(-\lambda)^s(\mu E)^{n-mk-m_1s}[(M(i,j))]_{n-mk-m_1s}}{k!s!(n-1-mk-m_1s)[(N(i,j))]_{n-mk-m_1s}}\times$$

$$\frac{[(1-M_1(i,j))]_{n-mk-m_1s}y^{m_2\eta(n-mk-m_1s)-1}}{[(1-N_1(i,j))]_{n-mk-m_1s}x^{\xi mk}}$$

जिसके साधारणीकरण से

$$(y^{1-m_2\eta}\partial/\partial y)S_n^{\xi\ \eta}(x,y)=\frac{(m_2\eta\mu E)[(M(i,j))][(1-M_1(i,j))]}{[(N(i,j))][(1-N_1(i,j))]}\times$$

$$\sum_{k=0}^{[n-1/m]} \sum_{s=0}^{[n-1/m_1]} \frac{(\alpha+\beta b_1+\beta)_{(n-1-mk)\beta+k-m_1\beta s}\nu^k(-\lambda)^s}{(\alpha+\beta b_1+\beta)_{(n-1-mk)\beta-m_1\beta s}k!s!(n-1-mk-m_1 s)!} \times$$

$$\frac{(\mu E)^{n-1-mk-m_1 s}[1+(M(i,j))]_{n-1-mk-m_1 s}[(2-M_1(i,j))]_{n-mk-m_1 s-1}y^{m_2\eta(n-1-mk-m s)}}{[1+(N(i,j))]_{n-1-mk-m_1 s}[(2-N_1(i,j))]_{n-mk-1-m_1 s}x^{\xi m k}}$$

$$=\frac{(m_2\eta\mu E)[(M(i,j))][(1-M_1(i,j))]}{[(N(i,j))][(1-N_1(i,j))]} S^{\alpha+\beta;((a_p,A_p),1)}_{n-1;((b_{q+1},B_{q+1}),1)} (x^\xi y^\eta), \tag{2.2}$$

प्राप्त होता है जहाँ $n=\leqslant 1$.

एक एक करके s_1 बार अवकलित करने पर

$$(y^{1-m_2\eta}\partial/\partial y)^{s_1} S_n(x^\xi,y^\eta)=\frac{(m_2\eta\mu E)^{s_1}[(M(i,j))_{s_1}[(1-M_1(i,j))]_{s_1}}{[(N(i,j))]_{s_1}[(1-N_1(i,j))]_{s_1}}\times$$

$$S^{\alpha+s_1\beta;((ap,A_p),s_1)}_{n-s_1;((b_{q+1},B_{q+1}),s_1)} (x,^\xi y^\eta), (n\geqslant s_1). \tag{2.3}$$

विशिष्ट दशायें

(i) (2.2) में $\lambda=0=b_1=p=l_2=q$; $m=1=\beta=\mu=x=l_1=\xi=\eta$; $\alpha=1/2$; $m_2=2$ तथा $\nu=-1$ मानने पर

$$DH_{2n}(y)=4nH_{2n-1}(y),$$

जहाँ $D\equiv d/dy$ तथा $H_{2n}(Y)$ हर्माइट बहुपद है।

(ii) (2.2) में $\alpha=2\nu_1$; $\nu=1=m=m_2=l_1=l_2=p=\xi=\eta=x$; $\lambda=0=b_1=q$; $a_1=1-\nu_1$, $A_1=1$; $\mu=2=\beta$ तथा $y=Y-1$ रखने पर

$$DC_n^{\nu_1}(Y)=2\nu_1 C_{n-1}^{\nu_1+1}(Y),$$

जहाँ $D\equiv d/dy$ तथा $C_n(Y)$ गेगेनबॉर बहुपद है।

(iii) (2.2) में $\alpha=1+c+d$; $\lambda=0=b_1$; $\mu=2=\beta=p=l_2$; $m_2=1=\nu=m=q=l_1=\xi=\eta=x$; $a_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}d$, $a_2=-\frac{1}{2}c-\frac{1}{2}d$, $A_1=1=A_2$; $b_2=-c$. $B_2=1$; $y=Y-1$ प्रतिस्थापन करके और तब संकलनों के क्रम को उलटने पर

$$DP_n^{(c,d)}(Y)=\left(\frac{1+c+d+n}{2}\right) P_{n-1}^{(c+1,d+1)}(Y)$$

जहाँ $D\equiv\frac{d}{dY}$ तथा $P_n^{(c,d)}(Y)$ जैकोबी बहुपद है ।

(iv) यदि (2.2) में $\lambda=0=b_1=p=l_2=q;\ l_1=1=\beta=\nu=m=m_2=\xi=\eta=x;$ $\alpha=1+\lambda_1$ तथा $\mu=-1$ लिया जाय और संकलनों के क्रम को उलट दिया जाय तो

$$DL_n^{(\lambda_1)}(Y)=-L_{n-1}^{(\lambda_1+1)}(Y),$$

जहाँ $D\equiv\frac{d}{dy}$ तथा $L_n^{(\lambda_1)}(y)$ लागेर का बहुपद है ।

(v) (2.2) में $m=1=m_2=l_1=\mu=\xi=\eta=x;\ \nu=-1;\ \lambda=0=b_1=l_2=p=q=\beta;$ $\alpha=1+\lambda_1$ रखने तथा संकलनों के क्रम को उलटने पर

$$DA_n^{(\lambda_1)}(y)=A_{n-1}^{(\lambda_1)}(y),$$

जहाँ $D\equiv\frac{d}{dy}$ तथा $A_n^{(\lambda_1)}(y)$ श्रीवास्तव का बहुपद है ।

इसी प्रकार अन्य बहुपदों के परिणाम भी लिखे जा सकते हैं ।

(2.3) से निगमन : ऊपर (i) से (v) में दिये गये प्रतिबन्धों से निम्नलिखित परिणाम विशिष्ट दशाओं के रूप में प्राप्त होते हैं :

(i) $$\frac{d^{s_1}}{dy^{s_1}}H_{2n}(y)=\frac{2^{2s_1}(n)!}{(n-s_1)!}H_{2n-2s_1}(y).$$

(ii) $$\frac{d^{s_1}}{dy^{s_1}}C_n^{\nu_1}(Y)=\frac{(\nu_1)_{n+s_1}(-n)_{s_1}\,C_n^{\nu_1-s_1}(Y)}{(\nu_1-s_1)_n(1-\nu_1-s_1-n)_{s_1}(Y-1)^{s_1}}.$$

(iii) $$\frac{d^{s_1}}{dY^{s_1}}P_n^{(c,d)}(Y)=2^{-s_1}(1+c+d+n)_{s_1}P_{n-s_1}^{(c+s_1,d+s_1)}(Y).$$

(iv) $$\frac{d^{s_1}}{dy^{s_1}}L_n^{(\lambda_1)}(y)=(-1)^{s_1}L_{n-s_1}^{(\lambda_1+s_1)}(y).$$

(v) $$\frac{d^{s_1}}{dy^{s_1}}A_n^{(\lambda_1)}(y)=A_{n-s_1}^{(\lambda_1)}(y).$$

3. x के प्रति आवर्तन सम्बन्ध

(2.1) के दोनों पक्षों को अंशतः x के प्रति अवकलित करने पर

$$\frac{\partial}{\partial x} S_n(x^\xi,y^\eta) = -m\xi \sum_{k=1}^{[n/m]} \sum_{s=0}^{[n/m1]} \frac{(\alpha+\beta b_1)_{(n-mk)\beta+l-m_1\beta s}}{(\alpha+\beta b_1)_{(n-mk)\beta-m_1\beta s}} \times$$

$$\frac{(\mu E)^{n-mk-m_1 s} \nu^k (-\lambda)^s [(M(i,j))]_{n-mk-m_1 s}}{(k-1)!s!(n-mk-m_1 s)![N(i,j))]_{n-mk-m_1 s}} \times$$

$$\frac{[(1-M_1(i,j))]_{n-mk-m_1 s} x^{-\xi\, mk-1} y^{m_2 \eta (n-mk-m_1 s)}}{[(1-N_1(i,j))]_{n-mk-m_1 s}}$$

$$= -m\xi\nu \sum_{k=0}^{[n-m/m]} \sum_{s=0}^{[n-m/m1]} \frac{(\alpha+\beta a_1+(n-m-mk)\beta+k-m_1\beta s)}{k!s!(n-m-mk-m_1 s)!} \times$$

$$\frac{(\alpha+\beta b_1)_{(n-m-mk)\beta+l-m_1\beta s} \nu^k (-\lambda)^s (\mu E)^{n-m-mk-m_1 s}}{(\alpha+\beta b_1)_{(n-m-mk)\beta-m_1\beta s}} \times$$

$$\frac{[(M(i,j))]_{n-m-mk-m_1 s}[(1-M_1(i,j))]_{n-m-mk-m_1 s} y^{m_2 \eta (n-m-mk-m_1 s)}}{[(N(i,j))]_{n-m-mk-m_1 s}} \times$$

$$\frac{x^{-1\cdot m\xi - m\xi k}}{[(1-N_1(i,j))]_{n-m-mk-m_1 s}},$$

जिसके साधारणीकरण से निम्नलिखित फल प्राप्त होता है :

$$\frac{\partial}{\partial x} S_n(x^\xi,y^\eta) + (m\nu\xi)(\alpha+\beta b_1+(n-m)\beta) x^{-1-m\xi} S_{n-m}(x^\xi,y^\eta)$$

$$+\nu(m\beta-1)x^{-m\xi} \frac{\partial}{\partial x} S_{n-m}(x^\xi,y^\eta) + (mm_1\xi\nu\beta\lambda) x^{-1-m\xi} S_{n-m-m_1}(x^\xi,y^\eta)$$

$$=0,$$

जहाँ $n \geqslant = m+m_1$. (3.1)

विशिष्ट दशा :

यदि (3.1) में $\alpha=a+n; \lambda=0=b_1; \beta=1=\nu=m=m_2, \xi=\eta=l_1=y;\ l_2=p; a_p=1-(a_p)$, $A_1=1=A_2=A_3=\ldots=A_p;\ b_{q+1}=1-(\beta_q),\ B_2=1=B_3=B_4=\ldots=B_{q+1};\ \mu=-1$ लें तो संकलनों के क्रम के विपर्यय से हमें निम्नवत् प्राप्त होगा :

$$D\left[\frac{1}{x^n} S_n(x)\right] = -\frac{(a+2n-1)}{x^{n+1}} S_{n-1}(x),$$ जहाँ $D\equiv\frac{d}{dx}$ तथा $S_n(x)$ शिवली-टास्कैनो बहुपद है।

निर्देश

1. बहल, ए० के०, **पी-एच० डी० थीसिस, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय,** 1971
2. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०,** 1961, **98**, 395-429
3. रेनविले, ई० डी०, Special Functions. **मैकमिलन कम्पनी, न्यूयार्क,** 1963
4. सिंह, आर० पी०, Math Japonicae, 1964, **9**, 5-9
5. सिंह, आर० तथा पाण्डेय, आर० एन० **(प्रेषित)**

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 1, January, 1980, Pages, 25-35

आंशिक अवकल समीकरण तथा सार्वीकृत हाइपरज्यामितीय फलन

ए० एन० गोयल तथा के० सी० जैन
गणित विभाग, राजस्थान विश्वविद्यालय, जयपुर

[प्राप्त—अप्रैल 9, 1978]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में लेखकद्वय द्वारा परिभाषित तीन चरों वाले सार्वीकृत फलन से तुष्ट होने वाले आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त किये गये हैं।

Abstract

On partial differential equations and generalised hypergeometric functions. *By* A. N. Goyal and K. C. Jain, Department of Mathematics, University of Rajasthan, Jaipur.

In this paper we have obtained partial differential equations satisfied by the generalised function of three variables defined by the authors. The partial differential equations so obtained contain the ones given by Saran, Chaturvedi, Sharma and Meijer, as particular cases. We have also investigated the series solution of these partial differential equations near the singular point (0, 0, 0). The solutions near the singularities viz. $(0, 0, \infty)$, $(0, \infty, 0)$, $(\infty, 0, 0)$, $(0, \infty, \infty)$, $(\infty, 0, \infty)$, $(\infty, \infty, 0)$, (∞, ∞, ∞) can also be investigated on similar lines.

1. प्रस्तावना

हम[3] तीन चरों वाले सार्वीकृत फलन को निम्न रूप में परिभाषित करते हैं

$$H^{m,\,0;\,n_1,\,n_1;\,n_2,\,n;\,m_3,\,n_3\,:}_{p,\,q;\,p_1,\,q_1;\,p_2,\,q_2;\,p_3,\,q_3\,:}\left[\begin{array}{c|c} x_1 & ((a_p;\overset{t_1}{\alpha_p},\overset{t_2}{\alpha_p},\overset{t_3}{\alpha_p})):((b_q;\overset{t_1}{\beta_q},\overset{t_2}{\beta_q},\overset{t_3}{\beta_q})) \\ & ((\overset{1}{e}_{p_1},\overset{1}{\gamma}_{p_1})):((\overset{1}{d}_{q_1},\overset{1}{\delta}_{q_1})) \\ x_2 & ((\overset{2}{c}_{p_2},\overset{2}{\gamma}_{p_2})):((\overset{2}{d}_{q_2},\overset{2}{\delta}_{q_2})) \\ x_3 & ((\overset{3}{c}_{p_3},\overset{3}{\gamma}_{p_3})):((\overset{3}{d}_{q_3},\overset{3}{\delta}_{q_3})) \end{array}\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi i)^3}\int_{L_1}\int_{L_2}\int_{L_3}\psi\left(\sum_{k=1}^{3} s_k\right)\prod_{k=1}^{3}\{\phi(s_k)\, x_k^{s_k}\, ds_k\} \tag{1·0}$$

जहाँ

$$\psi\left(\sum_{k=1}^{3} s_k\right)=\frac{\prod_{j=1}^{m}\Gamma(a_j+\sum_{k=1}^{3}\alpha_j^{t_k} s_k)}{\prod_{j=m+1}^{p}\Gamma(1-a_j-\sum_{k=1}^{3}\alpha_j^{t_k} s_k)\prod_{j=1}^{q}\Gamma(b_j+\sum_{k=1}^{3}\beta_j^{t_k} s_k)} \tag{1·1}$$

$$\phi(s_k)=\frac{\prod_{j=1}^{m_k}\Gamma(1-c_j^k+\gamma_j^k s_k)\prod_{j=1}^{n_k}\Gamma(d_j^k-\delta_j^k s_k)}{\prod_{j=1+m_k}^{p_k}\Gamma(c_j^k-\gamma_j^k s_k)\prod_{j=1+n_k}^{q_k}\Gamma(1-d_j^k+\delta_j^k s_k)} \tag{1·2}$$

$$((a_p, \alpha_p))\equiv(a_1, \alpha_1), (a_2, \alpha_2), (a_3, \alpha_3), \ldots, (a_p, \alpha_p) \tag{1·3}$$

$\forall\ k \in (1, 2, 3)$ पूर्णांकों, m, m_k; p_k, n_k, q_k, p, q द्वारा असमिकाओं

$$0\leqslant m\leqslant p,\ q\geqslant 0,\ 0\leqslant m_k\leqslant p_k,\ 0\leqslant n_k\leqslant q_k,\ p+q_k\leqslant q+q_k,\ q_k\geqslant 1 \tag{1·4}$$

की तुष्ट होती है।

$x_k=0$, $\forall\ k\in(1, 2, 3)$ मान वहिष्कृत हैं और रिक्त गुणनफल इकाई मान लिया गया है। कंटूर L_k $(k=1, 2, 3)$ तल पर है और आवश्यकता पड़ने पर अपने लूपों सहित $-i\infty$ से $+i\infty$ तक विस्तीर्ण है जिससे आश्वस्त रहा जा सके कि $\Gamma(d_j^k-\delta_j^k s_k), j=1, 2, \ldots, n_k$ के पोल कंटूर के दाईं ओर तथा $\Gamma(1-\gamma_j^k+\delta_j^k s_k), j=1, 2; \ldots, m_k$ एवं $\Gamma(a_j+\sum_{k=1}^{3}\alpha_j^{t_k} s_k)$ $j=1, 2, \ldots, m$ के पोल बाईं ओर पड़ें। परिभाषित फलन x_k, $\forall\ k \in (1, 2, 3)$ का वैश्लेषिक फलन होता है यदि

$$|\arg x_k|=|\phi_k|<(w_5'+\tfrac{1}{2}w_1'-\tfrac{1}{2}w_2')\pi \text{ तथा } 2w_5'+w_1'>w_2' \tag{1·5}$$

जहाँ

$$x_k=r_k\, e^{i\phi_k} \tag{1·6}$$

$$w_1'=\sum_{j=1}^{p}(\alpha_j^{t_k})+\sum_{j=1}^{p_k}(\gamma_j^k),\ w_2'=\sum_{j=1}^{q_k}(\delta_j^k)+\sum_{j=1}^{q}(\beta_j^{t_k}) \tag{1·7}$$

$$w_5'=\sum_{j=1}^{n_k}|(\delta_j^k)|-\sum_{j=1+m}^{p}|(\alpha_j^{t_k})|-\sum_{j=1+m_k}^{p_k}|(\gamma_j^k)| \tag{1·8}$$

तथा $((\alpha_p^{t_k}))$, $((\beta_q^{t_k}))$, $((\gamma_{p_k}^k))$, $((\delta_{q_k}^k))$, $\forall\ k \in (1, 2, 3)$ सभी पूर्ण संख्यायें हैं।

2. आंशिक अवकल समीकरणों का निर्माण

माना w के द्वारा (1·0) का दक्षिण पक्ष प्रदर्शित किया जाता है।

$x_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ को θ_k से, $(\sum_{j=1+m_k}^{p_k} \gamma_j^k - \sum_{j=1}^{n_k} \delta_j^k)$ को u_k से तथा $\sum_{j=1+m}^{p} \alpha_j^{t_k} + u_k)$ को w_k द्वारा अंकित करने पर w द्वारा तुष्ट तीन आंशिक अवकल समीकरणों $\forall\ k \in (1, 2, 3)$ को

$$\Big[(-1)^{w_k} x_k \prod_{j=1}^{p} (a_j + \sum_{k=1}^{3} \alpha_j^{t_k} \theta_k)_{\alpha_j^{t_k}} \prod_{j=1}^{p_k} (1 - c_j^k + \gamma_j^k \theta_k)_{\gamma_j^k}$$

$$- \prod_{j=1}^{q} (b_j + \sum_{k=1}^{3} \beta_j^{t_k} \overline{\theta_k - 1})_{\beta_j^{t_k}} \prod_{j=1}^{q_k} (1 - d_j^k - \delta_j^k + \delta_j^k \delta_k)_{\delta_j^k}\Big] w = 0 \qquad (2·1)$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है जहाँ

$$(a)_r = a(a+1)(a+2)(a+3) \ldots (a+r-1) \text{ तथा } (a)_0 = 1.$$

(2·1) को प्राप्त करने के लिये हम $\prod_{j=1}^{p_k} (1 - c_j^k + \gamma_j^k \theta_k)_{\gamma_j^k}$ को w पर आपरेट करते हैं तो

$$\prod_{j=1}^{p_k} (1 - c_j^k + \gamma_j^k \theta_k)_{\gamma_j^k} w = \frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{L_1} \int_{L_{2_k}} \int_{L_3} \psi(\sum_{k=1}^{3} s_k)$$

$$\prod_{g=\mu,\ D} \{\phi(s_g) X_g^{s_g} ds_g\} \phi(s_k) \prod_{j=1}^{p_k} (1 - c_j^k + \gamma_j^k s_k)_{\gamma_j^k} x_k^{s_k} ds_k \qquad (2.2)$$

जहाँ $k.\ \mu,\ D \in (1, 2, 3)$ लेकिन $k \neq \mu \neq D$। अब s_k को $s_k - 1$ द्वारा प्रतिस्थापित करने,

$$\Gamma(z+r) = (-1)^r (1-z-r)_r\ \Gamma(s) \qquad (2·3)$$

$$\Gamma(1-z-r) = \frac{\Gamma(1-z)}{(1-z-r)} \qquad (2.4)$$

को प्रयुक्त करने एवं सरलीकरण करने पर (2·2) का दक्षिण पक्ष निम्न प्रकार होगा:

$$\frac{1}{(2\pi i)^3} \int_{L_1} \int_{L_2} \int_{L_3} \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(a_j + \sum_{k=1}^{3} \alpha_j^{t_k} s_k - \alpha_j^{t_k}) \prod_{j=1}^{q_k} (1 - d_j^k - \delta_j^k + \delta_j^k s_k)_{\delta_j^k}}{\prod_{j=1+m}^{m} (1 - a_j - \sum_{k=1}^{3} \alpha_j^{t_k} s_k + \alpha_j^{t_k})\ x_k (-1)^{u_k}}$$

$$\times \frac{\prod_{k=1}^{3} \{\phi(s_k)\ x_k^{s_k} ds_k\}}{\prod_{j=1}^{p} \Gamma(b_j + \sum_{k=1}^{3} \beta_j^{t_k} s_k - \beta_j^{t_k})} \qquad (2·5)$$

अब (2·5) में $\prod_{j=1}^{p} (a_j + \sum_{k=1}^{3} a_j^{t_k} \theta_k)_{a_j^{t_k}}$ आपरेट करने और तब

$$(z-r)_r \Gamma(z-r) = \Gamma(z) \tag{2·6}$$

के साथ साथ (2·3) को प्रयुक्त करने पर (2·1) में दिया हुआ वांछित समीकरण प्राप्त होता है। यदि $q_k+q \geqslant p_k+p$ तो आंशिक अवकल समीकरण (2·1) की कोटियाँ q_k+q, $\forall\ k \in (1, 2, 3)$ होती हैं। $p_k+p<q_k+q$, $\forall\ k \in (1, 2, 3)$ मानने पर हमें नौ एकाकी वक्र प्राप्त होते हैं, यथा $x_1=0, x_1=\infty$, $x_2=0$, $x_2=\infty$, $x_3=0$, $x_3=\infty$, $x_1=x_2=x_3$. इस प्रकार आठ एकाकी बिन्दु यथा (0, 0, 0), (0, 0, ∞), (0, ∞, 0), (∞, 0, 0), (0, ∞, ∞), (∞, 0, ∞), (∞, ∞, 0) (∞, ∞, ∞) जिन्हें एकाकी वक्रों के एक स्थन पर काटने के द्वारा प्राप्त किये जाते हैं।

यदि $p_k+p=q_k+q$, $\forall\ k \in (1, 2, 3)$, तो विन्दु $\{(-1)^{w_1}, (-1)^{w_2}, (-1)^{w^3}\}$ भी आंशिक अवकल समीकरणों (2·1) का एकाको विदु होता है। हम इस एकाकी विन्दु के प्रतिवेश में हल का मूलभूत तन्त्र नहीं ढूँढ पाये।

यदि $p_k+p>q_k+q$, $\forall\ k \in (1, 2, 3)$, तो (2·1) समीकरणों के लिये पुनः हमें आठ एकाकी विन्दु प्राप्त होते हैं अर्थात् (0, 0, 0), (0, 0, ∞), (0, ∞, 0), (∞, 0, 0), (∞, ∞, 0), (∞, 0, ∞), (0, ∞, ∞), (∞, ∞, ∞).

3. विशिष्ट दशायें

$\forall\ k \in (1, 2, 3)$ जहाँ कहीं नियंत्रित नहीं है।

(I) यदि हम (2·1) में

$$\theta_1=\theta,\ \theta_2=\phi,\ \theta_3=\psi,\ x_1=x,\ x_2=y,\ x_3=z,$$

$$m_k=d_1^k=\gamma_1^k=0,\ n_k=q_k=\delta_1^k=1,$$

$$a_1=a_1,\ \ a_2=\beta_1,\ a_3=\beta_2,\ a_4=\gamma_1,\ b_1=\gamma_1,$$

$$c_1^1=a_1\ c_1^2=\beta_1,\ c_1^3=\beta_2 \tag{3·1}$$

$$a_5=\gamma_2,\ b_2=\gamma_2 \tag{3·2}$$

$$p_k=a_1^{t_k}=a_2^{t_1}=a_3^{t_2}=\beta_k^{t_k}\ (k\neq 3)=1,$$

$$a_2^{t_2}=a_3^{t_1}=a_j^{t_k}\ (j=4,\ 5)=\beta_1^{t_k}\ (k\neq 1)=\beta_2^{t_1}=0 \tag{3·3}$$

$$m=p=6,\ q=3,\ b_3=\gamma_3,\ a_6=\gamma_3,\ a_3^{t_3}=\beta_3^{t_3}=1,$$

$$a_2^{t_3}=a_6^{t_k}=\beta_2^{t_3}=\beta_3^{t_k}\ (k\neq 3)=0$$

प्रतिस्थापन करें, आंशिक अवकल समीकरणों की तुष्टि $F_E(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1; \beta_1. \beta_2, \beta_2; \gamma_1. \gamma_2, \gamma_3; x, y, z)$ द्वारा प्राप्त करें, जो सरन[5] द्वारा दिया गया फलन है अर्थात्

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad [\theta+\gamma_1-1)-x(\theta+\phi+\psi+\alpha_1)(\theta+\beta_1)]\, F_E=0 \\
&\text{(ii)} \quad [\phi(\phi+\gamma_2-1)-y(\theta+\phi+\psi+\alpha_1)(\phi+\psi+\beta_2]\, F_E=0 \qquad (3{\cdot}4) \\
&\text{(iii)} \quad [\psi(\psi+\gamma_3-1)- \qquad +\phi+\psi+\alpha_1)(\psi+\phi+\beta_2)]\, F_E=0
\end{aligned}$$

(II) (2·1) में (3·1), (32), (3·3) और

$$m=p=5, q=2, \; \alpha_2^{t_3}=\beta_2^{t_3}=1, \; a_3^{t_3}=0$$

प्रतिस्थापन करने पर हमें आंशिक अवकल प्राप्त होते हैं जिनकी तुष्टि फलन

$$E_F(a_1, \alpha_1, \alpha_1; \beta_1, \beta_2, \beta_1; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; x, y, z)$$

द्वारा होती है जो सरन[4] द्वारा दिया गया है अर्थात्

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad [\theta(\theta+\gamma_1-1)-x(\theta+\phi+\psi+\alpha_1)(\theta+\psi+\beta_1)]\, E_F=0 \\
&\text{(ii)} \quad [\phi(\phi+\psi+\gamma_2-1)-y(\theta+\phi+\psi+\sigma_1)(\phi+\beta_2)]\, F_F=0 \qquad (3{\cdot}5) \\
&\text{(iii)} \quad [\psi(\psi+\phi+\gamma_2-1)-z(\theta+\phi+\psi+\alpha_1)(\theta+\psi+\beta_1)]\, F_F=0
\end{aligned}$$

(III) (2·1) में (3·1), (3·2), (3·3), $m=p=6$, $q=2$, $a_6=\beta_3$,

$$\alpha_6^{t_3}=\beta_2^{t_3}=1, \; a_5^{t_k} \; (k\neq 3)=0=\alpha_j^{t_3} \; (j=2, 3)$$

प्रतिस्थापन करने पर हमें समीकरण प्राप्त होते हैं जिनकी तुष्टि फलन

$$F_G(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, \beta_3; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3; x, y, z)$$

द्वारा होती है जो सरन[4] द्वारा दिया गया है अर्थात्

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad [\theta(\theta+\gamma_1-1)-x(\theta+\phi+\psi+\alpha_1)(\theta+\beta_1)]\, F_G=0 \\
&\text{(ii)} \quad [\phi(\phi+\psi+\gamma_2-1)-y(\theta+\phi+\psi+\alpha_1)(\phi+\beta_2]\, F_G=0 \qquad (3{\cdot}6) \\
&\text{(iii)} \quad [\psi(\psi+\phi+\gamma_2-1)-z(\theta+\phi+\psi+\alpha_1)(\psi+\beta_3)]\, F_G=0
\end{aligned}$$

(IV) (2·1) में (3·1), (3·2)

$$\alpha_1^{t_1}=\alpha_2^{t_k} \; (k\neq 2)=\alpha_3^{t_2}=\beta_1^{t_1}=\beta_3^{t_2}=1$$

$$\alpha_1^{t_k} \; (k\neq 1)=\alpha_2^{t_2}=\alpha_3^{t_k} \; (k\neq 2)=\alpha_j^{t_k} \; (j=4, 5)=\alpha_6^{t_1}=\beta_1^{t_k} \; (k\neq 1)=\beta_2^{t_1}=0 \quad (3{\cdot}7)$$

तथा

$$m=p=7, \; q=3, \; p_1=2, \; a_6=\gamma_3, \; a_7=\alpha_2, \; b_3=\gamma_3, \; c_2^1=\alpha_2,$$

$$p_2=p_3=\alpha_7^{t_k}\ (k\neq 1)=\beta_3^{t_3}=1,\ \overset{1}{\gamma_2}=\alpha_6^{t_k}\ (k\neq 1)=\alpha_7^{t_1}=\beta_2^{t_3}=\beta_3^{t_k}\ (k\neq 1)=0$$

प्रतिस्थापन करने पर हमें आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं जिनकी तुष्टि फलन

$$F_K(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_2.\ \beta_1, \beta_2, \beta_1;\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3;\ x, y, z)$$

द्वारा होती है जिसे सरन[4] ने दिया है अर्थात्

(i) $[\theta(\theta+\gamma_1-1)-x(\theta+\alpha_1)(\theta+\psi+\beta_1)]\ F_K=0$

(ii) $[\phi(\phi+\gamma_2-1)-y(\phi+\psi+\alpha_2)(\phi+\beta_2)]\ F_K=0$ (3·8)

(iii) $[\psi(\psi+\gamma_3-1)-z(\psi+\phi+\alpha_2)(\theta+\psi+\beta_1)]\ F_K=0$

(V) (2·1) में (3·1), (3·2), (3·7),

$$\alpha_6^{t_k}\ (k\neq 1)=\beta_2^{t_3}=1$$

तथा

$$m=p=6,\ q=p_1=2,\ p_1=p_2=1,\ \alpha_6=\alpha_2,\ \overset{3}{c_2}=\alpha_2,\ \overset{3}{\gamma_2}=0 \qquad (3·9)$$

प्रतिस्थापन करने पर हमें आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं जिनकी तुष्टि फलन

$$F_M(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_2,\ \beta_1, \beta_2, \beta_1;\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_2;\ x, y, z)$$

द्वारा होती है जिसे सरन[4] ने परिभाषित किया है अर्थात्

(i) $[\theta(\theta+\gamma_1-1)-x(\theta+\theta_1)(\theta+\psi+\beta_1)]\ F_M=0$

(ii) $[\phi(\phi+\psi+\gamma_2-1)-y(\phi+\psi+\alpha_2)(\phi+\beta_2)]\ F_M=0$ (3·10)

(iii) $[\psi(\psi+\phi+\gamma_2-1)-z(\phi+\psi+\alpha_2)(\theta+\psi+\beta_1)]\ F_M=0$

(VI) (2·1) में (3·1). (3·2), (3·7) एवं $m=p=7$,

$$q=p_1=p_2=2,\ \alpha_6=\alpha_2,\ \alpha_7=\alpha_3,\ \overset{1}{c_2}=\alpha_2,\ \overset{2}{c_2}=\alpha_3,\ p_3=\alpha_6^{t_2}$$

$$\alpha_7^{t_3}=\beta_2^{t_3}=1_1,\ \overset{1}{\gamma_2}=\overset{2}{\gamma_2}=\alpha_6^{t_2}=\alpha_7^{t_k}\ (k\neq 3)=0$$

प्रतिस्थापन करने पर हमें आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं जिनकी तुष्टि फलन

$$F_N(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1, \beta_2, \beta_1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_2;\ x, y, z)$$

द्वारा होती है जिसे सरन[4] ने दिया है अर्थात्

(i) $[\theta(\theta+\gamma_1-1)-x(\theta+\alpha_1)(\theta+\psi+\beta_1)]\ F_N=0$

(ii) $[\phi(\phi+\psi+\gamma_2-1)-y(\phi+\alpha_2)(\phi+\beta_2)]\ F_N=0$ (3·11)

(iii) $[\psi(\psi+\phi+\gamma_2-1)-z(\psi+\alpha_3)(\theta+\psi+\beta_1)]\ F_N=0$

(VII) (2·1) में (3·1), (3·2), (3·9),

$$a_1^{t_2}\ (k\neq 2)=a_j^{t_1}=a_2^{t_2}=\beta_1^{t_1}=\beta_2^{t_2}\ (k\neq 1)=1,$$

$$a_1^{t_2}=a_3^{t_1}=a_j^{t_k}\ (j=4,5)=a_2^{t_k}\ (k\neq 2)=\beta_1^{t_k}\ (k\neq 1)\,\beta_2^{t_1}=0 \qquad (3\cdot 12)$$

एवं

$$a_2^{t_2}=a_3^{t_3}=1,\ \ a_2^{t_3}=a_3^{t_2}=0$$

प्रतिस्थापन करने पर हमें आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं जिनकी तुष्टि सरन[4] द्वारा दिये गये फलन

$$F_P(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1, \beta_1, \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_2; x, y, z)$$

से होती है अर्थात्

(i) $[\theta(\theta+\gamma_1-1)-x(\theta+\psi+\alpha_1)(\theta+\phi+\beta_1)]\ F_P=0$

(ii) $[\phi(\phi+\psi+\gamma_2-1)-y(\phi+\alpha_2)(\theta+\phi+\beta_1)]\ F_P=0$ (3·13)

(iii) $[\psi(\psi\cdot\phi+\gamma_2-1)-z(\psi+\beta_2)(\theta+\psi+\alpha_1)]\ F_P=0$

(VIII) (2·1) में (3·1), (3·2), (3·9), (3·12) एवं (2·1) में

$$a_2^{t_3}=a_3^{t_2}=1,\ \ a_2^{t_2}=a_3^{t_3}=0$$

प्रतिस्थापन करने पर हमें आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं जिनकी तुष्टि सरन[4] द्वारा दिये गये फलन

$$F_R(\alpha_1. \alpha_2, \alpha_1, \beta_1, \beta_2, \beta_1,; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_2; x, y, z)$$

से होती है अर्थात्

(i) $[\theta(\theta+\gamma_1-1)-x(\theta+\psi+\alpha_1)(\theta+\psi+\beta_1)\ F_R=0$

(ii) $[\phi(\phi+\psi+\gamma_2-1)-y(\phi+\alpha_2)(\phi+\beta_1)]\ F_R=0$ (3·14)

(iii) $[\psi(\phi+\psi+\gamma_2-1)-z(\theta+\psi+\alpha_1)(\theta+\psi+\beta_1)]\ F_R=0$

(IX) (3·1) में $m=p=6,\ p_2=2,\ a_6=\beta_3,\ c_2^{2}=\beta_3,\ \gamma_2^{2}=a_2^{t_k}\ (k\neq 2)=0$ तथा (2·1) में

$$\left.\begin{aligned} &p_1=2,\ p_3=q=1,\ a_5=\alpha_2,\ c_2^{1}=\alpha_2,\ \gamma_2^{1}=0,\\ &a_1^{t_1}=a_2^{t_1}=a_3^{t_2}=a_5^{t_k}\ (k\neq 1)=\beta_2^{t_k}=1\\ &a_1^{t_k}\ (k\neq 1)=a_3^{t_k}\ (k\neq 2)=a_4^{t_k}=a_5^{t_1}=0 \end{aligned}\right\} \qquad (3\cdot 15)$$

प्रतिस्थापन करने पर हमें आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं जिनकी तुष्टि सरन[4] द्वारा दिये फलन

$$F_S(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_3; \gamma_1, \gamma_1, \gamma_1, \gamma_1; x, y, z)$$

से होती है अर्थात्

$$\text{(i)} \quad [\theta(\theta+\phi+\psi+\gamma_1-1)-x(\theta+\alpha_1)(\theta+\beta_1)]\, F_S=0$$

$$\text{(ii)} \quad [\phi(\theta+\phi+\psi+\gamma_1-1)-y(\phi+\psi+\alpha_2)(\phi+\beta_2)]\, F_S=0 \qquad (3{\cdot}16)$$

$$\text{(iii)} \quad [\psi(\theta+\phi+\gamma_1-1)-z(\phi+\psi+\alpha_2)(\psi+\beta_3)]\, F_S=0$$

(X) (2·1) में (3·1), (3·15) एवं $m=p=5$, $p_2=1$, $a_2^{t_3}=1$, $a_2^{t_2}=0$

प्रतिस्थापन करने पर हमें आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं जिनकी तुष्टि सरन[4] द्वारा दिये फलन

$$F_T(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \beta_1; \gamma_1, \gamma_1, \gamma_1; x, y, z)$$

से होती है अर्थात्

$$\text{(i)} \quad [\theta(\theta+\phi+\psi+\gamma_1-1)-x(\theta+\alpha_1)(\theta+\psi+\beta_1)]\, F_T=0$$

$$\text{(ii)} \quad [\phi(\theta+\phi+\psi+\gamma_1-1)-y(\phi+\beta_2)(\phi+\psi+\alpha_2)]\, F_T=0 \qquad (3{\cdot}17)$$

$$\text{(iii)} \quad [\psi(\theta+\phi+\psi+\gamma_1-1)-z(\psi+\theta+\beta_1)(\phi+\psi+\alpha_2)]\, F_T=0$$

(XI) यदि (2·1) में हम

$$m=m_1,\ p=p_1,\ q\quad q_1,\ m_1=m_2,\ n_1=n_2,\ p_1=p_2,\ q_1=q_2,\ m_2=m_3,\ n_2=n_3,$$

$$p_2=p_3,\ q_2=q_3,\ m_3=n_3=p_3=q_3=a_j^{t_3}=a_j^{t_3}=0,\ a_j^{t_1}=a_j^{t_2}=a_j=\beta_j^{t_1}=\beta_j^{t_2}=\beta_j,$$

$$c_j^1=c_j,\ \gamma_j^1=\gamma_j,\ d_j^1=d_j,\ \delta_j^1=\delta_j,\ c_j^2=e\cdot,\ \gamma_j^2=\lambda,\ d_j^2=f_j,\ \delta_j^2=\mu_j,\ x_1=x,\ x_2=y$$

प्रतिस्थापन करें और सीमा को $x_3 \to 0$ लें तो हमें आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं जिनकी तुष्टि चतुर्वेदी[2] द्वारा दिये गये फलन $A^*(x, y)$ द्वारा होती है।

(XII) और आगे यदि

$$a_j=\beta_j=\gamma_j=\delta_j=\delta_j=\lambda_j=\mu_j=1,\ b_j=a'_i,\ c_j=b_j,\ d_j=b'_j,,\ e_j=c,\ f_j=c'_j,$$

तो हमें आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होते हैं जिनकी तुष्टि शर्मा[6] द्वारा परिभाषित फलन द्वारा होती है। चूँकि S फलन में अग्रवाल[7] द्वारा परिभाषित $G(x, y)$ रहता है अतः हम सरलतापूर्वक आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त कर सकते हैं जिनकी तुष्टि $G(x, y)$ द्वारा हो।

(XIII) पुनः यदि हम

$$m_1=p_1=q_1=m_2=n_2=p_2=q_2=0,\ m_3=n,\ n_3=m,\ p_3=p,\ q_3=q,\ c_j=a_j,\ c_j'=b_j$$

तथा सीमा $y\to 0$ लें तो हमें आंशिक अवकल समीकरण प्राप्त होंगे जिनकी तुष्टि माइजर के फलन द्वारा होगी अर्थात् (एर्डेल्यी[4])

$$[(-1)^{p-m-n}\, x \prod_{j=1}^{p} (\theta-a_j+1)-\prod_{j=1}^{q} (\theta-b_j)]\, G(x)=0 \tag{3·18}$$

4. एकाकी बिन्दु (0, 0, 0) के निकट हल

श्रेणी के द्वारा हल की प्रसिद्ध विधि का उपयोग करते हुये हम आंशिक अवकल समीकरणों (2·1) के हल को निम्नलिखित रूप का मान लेते हैं

$$w=x_1^{h_1} x_2^{h_2} x_3^{h_3} \sum_{v_1,\, v_2,\, v_3=0}^{\infty} x_1^{v_1} x_2^{v_2} x_3^{v_3} A_{v_1, v_2, v_3} \tag{4·1}$$

जहाँ h_1, h_2, h_3 अचर हैं तथा v_1, v_2, v_3 पूर्ण संख्यायें हैं। (2·1) में w के मानों को (4·1) में से रखने पर

$$(-1)^{w_k} \sum_{v_1,\, v_2,\, v_3=0}^{\infty} \prod_{j=1}^{p} [a_j+\sum_{k=1}^{3} a_j^{t_k}(h_k+v_k)]_{a_j^{tk}}$$

$$\prod_{j=1}^{p_k} [1-c_j^k+\gamma_j^k (h_k+v_k)]_{\gamma_j^k} A_{v_1, v_2, v_3}\, x_k \prod_{k=1}^{3} x_k^{h_k+v_k} - \prod_{v_1,\, v_2,\, v_3=0}^{\infty}$$

$$\prod_{j=1}^{q} [b_j-\beta_j^{t_k}+\sum_{k=1}^{3} \beta_j^{t_k} (h_k+v_k)]_{\beta_j^{t_k}} \prod_{j=1}^{q_k} [1-d_j^k+\delta_j^k (h_k+v_k)]_{\delta_j^k}$$

$$A_{v_1, v_2, v_3} \prod_{k=1}^{3} x^{h_k+v_k}=0 \tag{4·2}$$

(4·2) से, तंत्र के घातीय (indicial) समीकरण हैं $\forall\ k \in (1, 2, 3)$

$$\prod_{j=1}^{q}(b_j-\beta_j^{t_k}+\sum_{k=1}^{3}\beta_j^{t_k}h_k)_{\beta_j^{t_k}}\prod_{j=1}^{q_k}(1-\delta_j^k-d_j^k+\delta_j^k h_k)_{\delta_j^k}=0 \qquad (4\cdot3)$$

उपर्युक्त समीकरणों (4·3) से r सम्भव सेट बनेंगे जिनके मान प्राचल h_1, h_2, h_3 हैं जहाँ

$$r=\prod_{k=1}^{3}(\sum_{j=1}^{q_k}\delta_j^k)+ \text{इसी प्रकार के पदों का योग} +\sum_{j=1}^{q}(\beta_j^{t_k})\sum_{j=1}^{q_k}(\delta_j^{t_h})\sum_{j=1}^{q_i}(\delta_j^{t_i}+k,\ h,\ i$$

के विभिन्न सम्भव संयोगों के संगत + निम्नलिखित प्रकार के पद

$$\sum_{j=1}^{q}(\beta_j^{t_k})\sum_{j=1}^{q}(\beta_j^{t_h})\sum_{j=1}^{q_i}(\delta_j^{t_i})$$

जो k, h, i के विभन्न सम्भव संयोगों के संगत हैं उनका योग+

$$\prod_{k=1}^{3}\left[\sum_{j=1}^{q}(\beta_j^{t_k})\right]$$

k, h, i (1, 2, 3) लेकिन $k\neq h\neq i$ । हम इन मानों को जटिल पदों के कारण नहीं ढूँढ पाये । यदि हम अपने फलन को सरन द्वारा परिभाषित फलन

$$F_E(\alpha_1,\ \alpha_1,\ \alpha_1,\ \beta_1;\ \beta_2,\ \beta_2,;\ \gamma_1,\ \gamma_2,\ \gamma_3;\ x,\ y,\ z)$$

में समानीत करें तो प्राचलों के h_1, h_2, h_3 मानों के सम्भव सेटों की संख्या केवल आठ होगी । समीकरण (4·3) से

$$A_{v_1,\ v_2,\ v_3}=\frac{\prod_{j=1}^{p}\prod_{i=1}^{3}(a_j+\sum_{k=1}^{3}\alpha_j^{t_k}(h_k+u_k))_{\alpha_j^{t_i}}}{\prod_{j=1}^{q}\prod_{i=1}^{3}(b_j+\sum_{k=1}^{3}\beta_j^{t_k}(h_k+n_k))_{\beta_j^{t_k}}}$$

$$\times\prod_{k=1}^{3}\left[\frac{\prod_{j=1}^{p_k}(1-c_j^k+\gamma_j^k(h_k+u_k))_{\gamma_j^k}(-1)^{w_k}}{\prod_{j=1}^{q_k}(1-d_j^k+\delta_j^k(h_k+u_k))_{\delta_j^k}}\right]A \qquad (4\cdot4)$$

जहाँ A अचर है v_1, v_2, v_3 से स्वतन्त्र है । प्रत्येक सेट के संगत, जिनके मान h_1, h_2, h_3 हैं, हमें $A_{v_1,\ v_2,\ v_3}$ का एक मान मिलेगा । इस प्रकार से प्राप्त Av_1, v_2, v_3 के मान समीकरण (4·1) के साथ मिल कर (2·1) का सामान्य हल प्रस्तुत करते हैं जो विन्दु (0, 0, 0) के प्रतिवेश में वैध है ।

इस प्रकार से (2·1) के सामान्य हलों को खोजा जा सकता है जो (0, 0, ∞), (0, ∞, 0), (∞, 0, 0), (0, ∞, ∞), (∞, 0, ∞), (∞, ∞, 0) एवं (∞, ∞, ∞) विन्दुओं के प्रतिवेश में वैध हों।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस**, 1965, **31A**, 536-546.
2. चतुर्वेदी, के० के०, **पी-एच० डी० थीसिस, राजस्थान विश्वविद्यालय**, 1970.
3. जैन, के० सी० तथा गोयल, ए० एन०, Acta Ciencia Indica में प्रकाशनाधीन
4. एर्डेल्यी, ए०, Higher Transcendental Functions, **भाग I, मैकग्राहिल न्यूयार्क**, 210.
5. सरन, एस०, **गणित**, 1954, **5(2)**, 77-91.
6. शर्मा, बी० एल०, **पी-एच० डी० थीसिस**, जोधपुर विश्वविद्यालय, 1965.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 1, January, 1980, Pages 37-42

जैकोबी श्रेणी की नारलुंड संकलनीयता

बी० के० व्यौहर तथा के० के० मिश्र
माधव विज्ञान महाविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—अप्रैल 19, 1978]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में जैकोबी श्रेणी की नारलुंड संकलनीयता पर एक प्रमेय सिद्ध किया गया है जो फूरियर श्रेणी की नारलुंड संकलनीयता पर पती के प्रमेय 2 के संगत है।

Abstract

On Nörlund summability of Jacobi series. *By* B. K. Beohar and K. K. Mishra, Madhav Vigyan Mahavidyalaya, Ujjain.

In the present paper we prove a theorem on Nörlund summability of Jacobi series which corresponds to Pati's theorem 2 on Nörlund summability of Fourier series.

1. माना $\Sigma\, U_n$ दी हुई श्रेणी है जिसके आंशिक योगफलों का अनुक्रम $\{s_n\}$ है। माना $\{p_n\}$ वास्तविक या संकुल चरों का अनुक्रम है तो हम लिखेंगे कि

$$p_n = p_0 + p_1 + \cdots p_n,\ p_n \neq 0$$

अनुक्रमशः रूपान्तर

$$t_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{P_k\, s_{n-k}}{P_n} \tag{1·1}$$

द्वारा $\{p_n\}$ द्वारा जनित अनुक्रम $\{s_n)$ के नारलुंड माध्यों का अनुक्रम $\{t_n\}$ परिभाषित होता है। श्रेणी $\Sigma\, U_n$ योगफल s में संकलनीय (N, p_n) कहलाती है यदि $\lim_{n\to\infty} t_n$ का अस्तित्व हो और s के तुल्य हो।

(1.1) द्वारा परिभाषित संकलनीयता (N, p_n) की विधि की नियमितता के प्रतिबन्ध होंगे

$$\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{P_n}=0 \tag{1·2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k=0(\,|\,p_n\,|\,) \tag{1·3}$$

2. माना $f(x)$ एक फलन है जो अन्तराल $[-1, 1]$ में इस प्रकार परिभाषित है कि

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}f(x)\in L[-1, 1]$$

$f(x)$ से सम्बद्ध जैकोबी श्रेणी

$$f(x)\sim\Sigma\, a_n\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x) \tag{2·1}$$

है, जहाँ

$$a_n=g_n\int_{-1}^{1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}f(x)\,P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,dx \tag{2·2}$$

$$g_n=\frac{(2n+\alpha+\beta+1)}{2^{\alpha+\beta+1}}\,\frac{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n-\beta+1)}$$

$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ जैकोबी बहुपद है।

अब हम लिखेंगे

$$F(\phi)=[f(\cos\phi)-A]\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha+1}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{2\beta+1}$$

जहाँ A एक अचर है।

श्रेणी (2·1) की नारलुंड समाकलनीयता पर विचार करते हुये गुप्ता[1] ने निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है।

प्रमेय

माना $\{p_n\}$ एक ऐसा अनृण तथा अवर्धमान अनुक्रम है कि

$$\sum_{k=a}^{n}\frac{P_k}{K^{\alpha+3/2}\log k}=O\left(\frac{P_n}{n^{\alpha+1/2}}\right) \tag{2·3}$$

जिसमें a एक स्थिर धन पूर्णांक है तथा

$$\Sigma\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}<\infty \tag{2·4}$$

यदि $$\psi(t)=\int_0^t |F(\phi)|\,d\phi=O\left(\frac{t^{2\alpha+2}}{\log 1/t}\right) \tag{2·5}$$

तो $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$, $\beta>-\frac{1}{2}$ के लिये श्रेणी (2·1) $x=+1$ पर समाकलनीय है बशर्ते कि एंटीपोल प्रतिबन्ध तुष्ट हो अर्थात्

$$\int_{-1}^{b} (1+x)^{\beta/2-3/4}\,|f(x)|\,dx<\infty \tag{2·6}$$

स्थिर हो।

प्रस्तुत प्रपत्र में हम ऐसे प्रतिबन्ध के अन्तर्गत एक प्रमेय सिद्ध करेंगे जो फूरियर श्रेणी की नारलुंड समाकलनीयता के लिये पती के प्रमेय 2 के संगत हो। आगे हम निम्नलिखित प्रमेय को सिद्ध करेंगे।

3. प्रमेय

माना $\{P_n\}$ एक ऐसा वास्तविक अनृण अवर्द्धमान अनुक्रम है कि

$$\psi(t)=O\left(\frac{t^{\alpha+3/2}}{P_\tau}\right)\ \tau=[1/t] \tag{3·1}$$

तथा $$n^{\alpha+1/2}=O\left(\frac{P_n}{\log n}\right) \tag{3·2}$$

तो $-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$, $\beta>-\frac{1}{2}$, के लिये श्रेणी (2·1) विन्दु $x=1$ पर समाकलनीय $(N.\,p_n)$ है बशर्ते कि एंटी-पोल प्रतिबन्ध (2·6) की तुष्टि हो।

4. प्रमेय की उपपत्ति के लिये निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी :

प्रमेयिका 1[3]

α, β वास्तविक, यादृच्छिक तथा C स्थिर धनात्मक चर होने पर

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(\cos\theta)=\begin{cases}\theta^{-\alpha-1/2}\,O(n^{-1/2}) & \frac{C}{n}\leqslant\theta\leqslant\pi/2\\ O(n^{\alpha}) & o\leqslant\theta\leqslant\frac{C}{n}\end{cases} \tag{4·1}$$

प्रमेयिका 2

माना $$N_n(\phi)=\frac{2^{\alpha+\beta+1}}{P_n}\,\Sigma\, P_k\,\lambda_{n-k}\,P_{n-k}^{(\alpha+1,\beta)}(\cos\phi)$$

जहाँ $$n=2^{-\alpha-\beta-1}\,\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}\cong\frac{2^{-\alpha-\beta-1}\,n^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}$$

$0 \leqslant \phi \leqslant 1/n$ के लिये

$$| N_n(\phi) | = O(n^{2\alpha+2}) \tag{4·2}$$

तथा $\frac{1}{n} \leqslant \phi \leqslant \pi - 1/n$ के लिये

$$| N_n(\phi) | = O\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)\Big[P(1/\phi)(\sin \phi/2)^{3/2+\alpha}(\cos \phi/2)^{1/2+\beta}$$

$$+(n^{\alpha-1/2})\Big[(\sin \phi 2)^{-\alpha-5/2}(\cos \phi/2)^{-\beta-3/2} \tag{4·3}$$

इसकी उपपत्ति के लिये गुप्ता[1] का प्रपत्र देखें ।

5. $x=1$ पर श्रेणी (2·1) का n-वां आंशिक योगफल निम्न द्वारा दर्शाया जाता है

$$s_n(1) = 2^{\alpha+\beta+1} \lambda_n \int_0^\pi \left(\sin \frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{\phi}{2}\right)^{2\beta+1} P_n^{(\alpha+1,\, \beta)} (\cos \phi) f(\cos \phi)\, d\phi. \tag{5·1}$$

अत:
$$s_n(1) - A = 2^{\alpha+\beta+1} \lambda_n \int_0^\pi \left(\sin \frac{\phi}{2}\right)^{2\alpha+1} \left(\cos \frac{\phi}{2}\right)^{2\beta+1} P_n(\cos \phi)[\ f(\cos \phi) - A]\, d\phi$$

$$= 2^{\alpha+\beta+1} \lambda_n \int_0^\pi F(\phi)\ P_n^{(\alpha+1,\beta)} (\cos \phi)\, d\phi \tag{5·2}$$

अब
$$t_n = \frac{1}{p_n} \sum_{k=0}^{n} p_k\, s_{n-k}(1) \tag{5·3}$$

अत:
$$t_n - A = \frac{1}{p_n} \Sigma\, p_k(s_{n-k}(1) - A$$

$$= \frac{1}{p_n} \Sigma\, p_k\, 2^{\alpha+\beta+1} \lambda_{n-k} \int_0^\pi f(\phi)\ P_{n-k}^{(\alpha+1,\beta)} (\cos \phi)\, d\phi$$

$$= \int_0^\pi F(\phi)\, N_n(\phi)\, d\phi$$

$$= \left(\int_0^{1/n} + \int_{1/n}^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi-1/n} + \int_{\pi-1/n}^{\pi} \right) N_n(\phi)\, F(\phi)\, d\phi$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \text{ (माना)}$$

अब
$$I_1=\int_0^{1/n} N_n(\phi)\, F(\phi)\, d\phi$$
$$=O(n^{2\alpha+2})\int_0^{1/n} F(\phi)\, d\phi \qquad (4\cdot2) \text{ से}$$
$$=O\left(\frac{n^{+1/2}}{p_n}\right)$$
$$=O(1) \text{ ज्यों ज्यों } n\to\infty \qquad (3\cdot1) \text{ तथा } (3\cdot2) \text{ से} \qquad (5\cdot4)$$

इसके बाद, (4·3) उपयोग करने पर

$$I_2=O\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n}\right)\int_{1/n}^{\delta}\frac{|F(\phi)\mid P(1/\phi)\, d\phi}{(\sin\phi/2)^{\alpha+3/2}(\cos\phi/2)^{\beta+1/2}}$$
$$+O(n^{\alpha-1/2})\int_{1/n}^{\delta}\left(\sin\frac{\phi}{2}\right)^{-\alpha-5/2}\left(\cos\frac{\phi}{2}\right)^{-\beta-3/2}F(\phi)\, d\phi$$
$$=O\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{P_n}\right)\int_{1/n}^{\delta}F(\phi)\ \frac{p(1/\phi)}{\phi^{\alpha+3/2}}\, d\phi+O(n^{\alpha-1/2})\int_{1/n}^{\delta}|f(\phi)|\ \frac{d\phi}{\phi^{\alpha+5/2}}$$
$$=J_1+J_2 \ (\text{माना})$$

J_1 में समाकल होता है

$$\int_{1/n}^{\delta}F(\phi)\,\frac{p(1/\phi)}{\phi^{\alpha+3/2}}\,d\phi$$
$$=\left[\psi(\phi)\cdot\frac{p(1/\phi)}{\phi^{\alpha+3/2}}\right]_{1/n}^{\delta}+\int_{1/n}^{\delta}\psi(\phi)\,\frac{d}{d\phi}\left\{\frac{p(1/\phi)}{\phi^{\alpha+3/2}}\right\}d\phi=O(1)+J_{1\cdot1}$$

अब
$$J_{1\cdot1}=O\int_{1/n}^{\delta}\frac{\phi^{\alpha+3/2}}{p(1/\phi)}\cdot\frac{d}{d\phi}\left(\frac{p(1/\phi)}{\phi^{\alpha+3/2}}\right)d\phi$$
$$=O\int_{1/\delta}^{n}\frac{1}{x^{\alpha+3/2}p(x)}\left\{\frac{d}{d\phi}\ x^{\alpha+3/2}\ p(x)\right\}dx$$
$$=O(1)+O\int_{a1}^{n}\frac{1}{x^{\alpha+3/2}p(x)}\,\frac{d}{dx}(x^{\alpha+3/2}p(x)\,d\,x \quad a=\left[\frac{1}{\delta}\right]+1$$
$$=O(1)+O\sum_{k=a}^{n}\frac{\Delta((k^{\alpha+3/2}p(k))}{k^{\alpha+3/2}p_k}$$
$$=O(1)+O\sum_{k=0}^{n}\frac{p_k\,k^{\alpha+1/2}+k^{\alpha+3/2}\,p_{k+1}}{k^{\alpha+3/2}\,p_k}=O(\log n) \qquad (5\cdot5)$$

इसलिये

$$J_1 = O\left(\frac{n^{\alpha+1/2}}{p_n} . \log n\right) \text{ (3·2) से}$$

$$= O(1).$$

आगे, J_2 में समाकल है

$$\int_{1/n}^{\delta} | F(\phi) | \frac{d\phi}{\phi^{\alpha+5/2}} = \left[O\left(\frac{\phi^{\alpha+3/2}}{p(1/\phi)}\right) \cdot \frac{1}{\phi^{\alpha+5/2}} + \int O\left(\frac{\phi^{\alpha+3/2}}{p(1/\theta)}\right) \phi^{-\alpha-7/2} \, d\phi \right]_{1/n}^{\delta}$$

$$= O\left(\frac{n}{p_n}\right) + O \int_{1/\delta}^{n} \frac{dx}{p(x)} = O\left(\frac{n}{p_n}\right) + O \int_{1/\delta}^{n} \frac{x}{p(x)} \cdot \frac{dx}{x}$$

$$= O\left(\frac{n}{p_n}\right) + n \left(\frac{n}{p_n}\right) \int_{1/\delta}^{n} \frac{dx}{x} \left(\text{क्योंकि } \frac{x}{p(x)} \text{ वर्धमान फलन है}\right)$$

$$= O\left\{\frac{(n \log n)}{p_n}\right\}$$

और इस प्रकार $J_2 = O\, n^{\alpha-1/2} \times \left(\frac{n \log n}{p_n}\right) = O\left(\frac{n^{(\alpha+1/2)} \log n}{p_n}\right)$

$$= O(1) \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty. \quad (5·6)$$

अब (2·6) के सम्प्रयोग से एवं गुप्ता[1] का अनुसरण करने पर

$$I_3, I_4 = O(1) \text{ ज्यों-ज्यों } n \to \infty \quad (5·7)$$

(5·4), (5·5), (5·6), (5·7) के द्वारा प्रमेय पूर्णतः स्थापित होती है।

निर्देश

1. गुप्ता, डी० पी०, **डी० एस०सी० थीसिस, इलाहाबाद विश्वविद्यालय,** 1970, पृष्ठ 73-91.
2. पती, टी०, **इण्डियन जर्न० मैथ०,** 1961, 85-90.
3. जेगो, जी, Orthogonal Polynomials. **अमेरिकन मैथमेटिकल सोसाइटी कोलोकियम पब्लीकेशन्स, न्यूयार्क,** 1959.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 1, January, 1980, Pages, 43-48

बहुपदों की एक नवीन श्रेणी के लिये जनक फलन

ए० एन० श्रीवास्तव तथा एस० एन० सिंह
गणित विभाग, बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—जुलाई 3, 1978]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र लेखकों द्वारा प्रस्तावित बहुपदों $B_{kn}^{\alpha, v, a}(x, p, s)$ के अध्ययन की श्रृंखला में है। इसमें इन बहुपदों के लिये एक एकैकी तथा एक द्विपार्श्व जनक फलन प्राप्त किया गया है जिसकी विशिष्ट दशा के रूप में विविध प्रकार के एकैकी तथा द्विपार्श्व जनक फलन प्राप्त होते हैं। इसके आगे भी द्विपार्श्व जनक फलन को मिश्र त्रिपार्श्व जनक फलन के रूप में प्रसारित किया गया है।

Abstract

Generating functions for a new class of polynomials. *By* A. N. Srivastava and S. N. Singh, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi.

This is the continuation of the study of the polynomials $B_{kn}^{\alpha, v, a}(x, p, s)$ introduced by the authors. These polynomials are defined by means of

$$B_{kn}^{\alpha, v, a}(x, p, s) = 1/n!\, x^{-a-v-an} \exp(px^k)\, {}_aT_s^n\, (x^{a+v} \exp(-px^k)),$$

where

$${}_aT_s = x^a [s + x D],\ D \equiv d/dx.$$

In the present paper we obtain a bilinear and a bilateral generating function for these polynomials, which reduce as a special case to a large variety of bilinear and bilateral generating functions. We then extend this bilateral generating function in the form of *mixed trilateral* generating function.

1. प्रस्तावना

एक पिछले प्रपत्र में हमने[5] बहुपदों की एक नवीन श्रेणी सार्वीकृत रोड्रिग के सूत्र

$$B_{kn}^{\alpha, v, a}(x, p, s)=1/n!\ x^{-\alpha-v-an}\ \exp\ (px^k)\ {}_aT_s^n\ (x^{\alpha+t}\exp(-px^k)), \tag{1·1}$$

द्वारा प्रस्तावित की है जहाँ

$$ {}_aT_s=x^a\,[s+x\,D],\ D\equiv d/dx. \tag{1·2}$$

सार्वीकृत बहुपद सेट (1.1) के द्वारा कई विख्यात बहुपद तथा उनके अर्वाचीन सार्वीकरण भी विशिष्ट दशा के रूप में प्राप्त होते हैं। उदाहरणार्थ,

$$B_n^{\alpha, 1, 1,}(x, 1, 0)=L_n^{(\alpha)}(x),$$

जहाँ $L_n^{\alpha}(x)$ लागेर बहुपद है।

$$B_{kn}^{\alpha, 0, a}(x, p, 0)=G_n^{\alpha}(x; k, p, a),$$

जहाँ $G_n^{\alpha}(x; k, p, a)$ श्रीवास्तव तथा सिंहल[3] के बहुपद हैं।

2. जनक फलन

(1.1) को हम निम्न रूप में लिखेंगे

$$B_n^{\alpha}(x)=1/n!\ x^{-\alpha-v-an}\ \exp\ (px^k)\ {}_aT_s^n\ (x^{\alpha+v}\exp(-px^k)) \tag{2·1}$$

जहाँ तथा प्रस्तुत प्रपत्र में सर्वत्र

$$B_n^{\alpha}(x)=B_n^{\alpha, v, a}(x, p, k, s).$$

अब निम्न पर विचार करें

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Y)_n\,n!\,(x^a y^a t)^n}{(\alpha+1)_n(\beta+1)_n}B_n^{\alpha}(x)\,B_n^{\beta}(y)$$

$$=x^{-\alpha-v}y^{-\beta-v}\exp\,[p(x^k+y^k)]\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(y)_n\,t^n}{(\alpha+1)_n(\beta+1)_n\,.\,n!}$$

$$\times{}_aT_s^n\,(x^{\alpha+\beta}\exp(-px^k))\,.\,{}_aT_s^n\,(y^{\beta+v}\exp(-py^k))$$

$$=x^{-\alpha-v}\,y^{-\beta-v}\exp\,[p(x^k+y^k)]\sum_{i,j}\frac{(-1)^{i+j}}{i!\,j!}\,p^{i+j}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Y)_n\,t^n}{(\alpha+1)_n\,(\beta+1)_n\,n!}\;{}_aT_s^n\,(x^{\alpha+v+ki})\;{}_aT_s^n\,(y^{\beta+v+kj})$$

$$=\exp\,[p(x^k+y^k)]\sum_{i,j}\frac{(-1)^{i+j}}{i!\,j!}\,p^{+ij}$$

$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Y)_n\,t^n}{(\alpha+1)_n\,(\beta+1)\,n!}\,(a^2)^n\left(\frac{\alpha+v+ki+s}{a}\right)_n\,x^{ki+an}\left(\frac{\beta+v+kj+s}{a}\right)_n\,y^{kj+an}.$$

अत: हमें अपने बहुपद सेट के लिये एकैकी जनक फलन प्राप्त होगा

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(Y)_n\,n!}{(\alpha+1)_n\,(\beta+1)_n}\,B_n^{\alpha}(x)\,B_n^{\beta}(y)\,t^n$$

$$=\exp\,[p(x^k+y^k)]\sum_{i,j}\frac{(-1)^{i+j}\,p^{i+j}}{i!\,j!}\,(x^k)^i\,(y^k)^j$$

$$\times{}_3F_2\left[\begin{matrix}(Y),\left(\frac{\alpha+v+ki+s}{a}\right),\left(\frac{\beta+v+kj+s}{a}\right);\;a^2t\\(\alpha+1),\,(\beta+1);\end{matrix}\right] \qquad (2\cdot2)$$

$a=1=v$, $s=0$, तथा $p=1=k$, मानने पर यह चटर्जी[2] के लागेर बहुपदियों हेतु एकैकी फलन में समानीत हो जाता है । हमने[5] प्राप्त किया है कि

$$\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+n}{n}B_{m+n}^{\alpha}(x)\,t^n$$

$$=(1-at)^{-(\alpha+v+am+s)/a}\exp\,[px^k\{1-(1-at)^{-k/a}\}]\,B_m^{\alpha}\,(x(1-at)^{-1/a}) \qquad (2\cdot3)$$

हम $B_n^{\alpha}(x)$ के लिये एक द्विपार्श्व जनक फलन निम्नलिखित प्रमेय के रूप में प्राप्त करेंगे ।

प्रमेय 1

(2·3) से जनित बहुपदों $B_n^{\alpha}(x)$ के लिये, यदि

$$F_q[x,t]=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\,B_{qn+m}^{\alpha}(x)\,t^n, \qquad (2\cdot4)$$

तो $$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n+m}^{\alpha}(x)\,\sigma_n^q(y)\,t^n$$

$$=(1-at)^{-(\alpha+v+am+s)/a}\exp[px^k\{1-(1-at)^{-k/a}\}]$$
$$\times F_q[x(1-at)^{-1/a},\ y\{t(1-at)^{-1}\}^q], \qquad (2\cdot5)$$

जहाँ $$\sigma_n^q(y)=\sum_{i=0}^{[n/q]} A_i\binom{m+n}{m+qi}y^i, \qquad (2\cdot6)$$

जहाँ q एक यादृच्छिक धन पूर्णांक है और $A\neq0$ यादृच्छिक अचर हैं।

प्रमेय की उपपत्ति

(2·5) के वाम पक्ष में (2·6) से बहुपदों $\sigma_n^q(y)$ के लिये मान रखने पर तथा जनक फलन (2·3) के सम्प्रयोग से

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_{n+m}^{\alpha}(x)\,\sigma_n^q(y)\,t^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} B_{n+m}^{\alpha}(x)\,t^n\sum_{i=0}^{[n/q]} A_i\binom{m+n}{m+qi}y^i$$

$$=\sum_{i=0}^{\infty} A_i\,y^i\,t^{qi}\sum_{n=0}^{\infty}\binom{m+qi+n}{m+qi}B_{m+qi+n}^{\alpha}(x)\,t^n$$

$$=(1-at)^{-(\alpha+v+am+s)/a}\exp px^k\{1-(1-at)^{-k/a}\}]$$

$$\times\sum_{i=0}^{\infty} A_i\,B_{m+qi}^{\alpha}(x(1-at)^{-1/a})\,\{y\,t^q(1-at)^{-q}\}^i,$$

यदि हम अन्तिम व्यंजक को (2·4) की सहायता से विवेचन करें तो तुरन्त ही प्रमेय सिद्ध हो जाती है।

विशिष्ट दशायें

(i) $a=p=k=v=1$, एवं $s=0$ मानने पर हमें लागेर बहुपदों के लिये निम्नलिखित द्विपार्श्व जनक सम्बन्ध प्राप्त होता है:

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{n+m}^{(\alpha)}(x)\,\sigma_n^q(y)\,t^n$$

$$=(1-t)^{-(\alpha+m+1)}\exp[x\{1-(1-t)^{-1/q}\}]\,F_q[x(1-t)^{-1},\ y\{t(1-t)^{-1}\}^q],$$

जहाँ $F_q[x, t] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n L_{nq+m}^{(\alpha)}(x)\, t^n$

तथा $\sigma_n^q(y) = \sum_{i=0}^{[n/q]} A_i \binom{m+n}{m+qi} y^i.$

यदि हम $m=0$ तथा $q=1$, लें तो हमें सिंहल तथा श्रीवस्तव[4] द्वारा प्राप्त लागेर बहुपद के लिये द्विपार्श्व जनक फलन प्राप्त होगा।

(ii) प्रमेय 1 में $v=s=m=0$ एवं $q=1$ रखने पर हमें श्रीवास्तव तथा सिंहल द्वारा उनके बहुपदों $G_n^{\alpha}(x, k, p, a)$ के लिये प्राप्त निम्नलिखित जनक फलन मिलता है:

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n^{\alpha}(x, k, p, a)\, b_n(y)\, t^n$$

$$=(1-at)^{-\alpha/a} \exp\left[px^k\{1-(1-at)^{-k/a}\}\right] F[x(1-at)^{-1/a}, y\, t(1-at)^{-1}]$$

जहाँ $F[x, t] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n G_n^{\alpha}(x, k, p, a)$ तथा $b_n(y) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a_i y^i$

मिश्र त्रिपार्श्व जनक फलन

अब हम प्रमेय 1 का प्रसार प्रस्तुत करेंगे।

प्रमेय 2

(2·3) से जनित बहुपदों $B_n^{\alpha}(x)$ के लिये,

यदि $F_q[x, y, t] = \sum_{n=0}^{\infty} A_n B_{qn+m}^{\alpha}(x)\, g_n(y)\, t^n,$

तो $\sum_{n=0}^{\infty} B_{n+m}^{\alpha}(x)\, \sigma_n^q(y, z)\, t^n$

$$=(1-at)^{-(\alpha+v+s+am)/a} \exp\left[px^r\{1-(1-at)^{-k/a}\}\right]$$
$$\times F_q[x(1-at)^{-1/a}, y, z\{t(1-at)^{-1}\}^q],$$

जहाँ

$$\sigma_n^q(y, z) = \sum_{i=0}^{[n/q]} A_i \binom{m+n}{m+qi} g_i(y)\, z^i.$$

इस प्रमेय की उपपत्ति नहीं दी जा रही क्योंकि यह प्रमेय 1 की तरह ही है।

विशिष्ट दशायें

(i) प्रमेय 2 में $a=p=k=v=1$ एवं $s=0$ रखने पर हमें लागेर बहुपदों के लिये निम्नलिखित मिश्र त्रिपार्श्व जनक सम्बन्ध प्राप्त होता है।

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_{n+m}^{(a)}(x)\, \sigma_n^q(y, z)\, t^n$$

$$=(1-t)^{-(a+1+m)} \exp [x\{1-(1-t)^{-1/q}\}] \times F_q[x(1-t)^{-1}, y, z\{t(1-t)^{-1}\}^q].$$

जहाँ

$$F_q[x, y, t]=\sum_{r=0}^{\infty} A_n L_{qn+m}^{a}(x)\, g_n(y)\, t^n,$$

तथा

$$\sigma_n^q(y, z)=\sum_{i=0}^{[n/q]} A_i \binom{m+n}{m+qi} g_i(y)\, z^i.$$

यदि उपर्युक्त फल में हम $q=1$ लें तो हमें चटर्जी[1] के लागेर बहुपदों के हेतु द्विपार्श्व जनक फलन का प्रसार प्राप्त होता है।

इसी तरह यादृच्छिक चरों A_n को उपयुक्त मान प्रदान करके हम कई विख्यात बहुपदों के लिये विविध प्रकार के द्विपार्श्व तथा मिश्र त्रिपार्श्व जनक फलन प्राप्त कर सकते हैं।

निर्देश

1. चटर्जी, एस० के०, Bull. Inst. Math. Akad. Sinica, 1977, **5(2)**, 323-331.

2. वही, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस० (इंडिया)**, 1968, **34A, पूरक** 1, 87-90.

3. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा सिंहल, जे० पी०, Ann. Mat. Pura Appl. 1971, **40,** 345-353.

4. सिंहल, जे० पी० तथा श्रीवास्तव, एच० एम०, **पैसिफिक जर्न० मैथ०**, 1972, **42(3)**, 755-62.

5. श्रीवास्तव, ए० एन० तथा सिंह, एस० एन०, (**प्रेषित**)

चूंकि मिट्टियों में डाले गये सीसा की उपलब्धि को प्रभावित करने वाले कारकों के सम्बन्ध में, विशेष रूप से कार्बनिक पदार्थ के योगदान के विषय में बहुत ही कम साहित्य उपलब्ध है अतः प्रस्तुत अध्ययन इस सम्बन्ध में विस्तृत जानकारी प्राप्त करने के उद्देश्य से सम्पन्न किया गया ।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन के लिये एक जलोढ मिट्टी चुनी गई । इसके नमूने इलाहाबाद के निकटवर्ती स्थान मूरतगंज से एकत्र किये गये । इस मिट्टी के कुछ भौतिक तथा रासायनिक गुणधर्म सारणी 1 में दिये जा रहे हैं । दृष्टव्य है कि उपलब्ध सीसा की मात्रा कम है ।

सारणी 1

जलोढ मिट्टी के कतिपय भौतिक एवं रासायनिक गुणधर्म

पी-एच	$CaCO_3$ %	कार्बनिक C %	उपलब्ध P ppm	उपलब्ध Cu ppm	उपलब्ध Fe ppm	विनिमेय Pb ppm	मृत्तिका %
7·6	0·6	0·864	27	0·88	4·8	0·5	21.7

कार्बनिक पदार्थ के तीन स्रोत लिये गये: (A) ग्लूकोस, (B) पीट तथा (C) कम्पोस्ट । इनकी विभिन्न मात्रायें मिलाई गईं । इनमें उपस्थित सीसा (Pb) की मात्रा को प्राप्त मानों में से घटा दिया गया है ।

सीसे की तीन मात्रायें प्रयुक्त की गईं : 25, 50 तथा 100 ppm । इसके लिये लेड नाइट्रेट का विलयन बनाकर बीकरों में 100 ग्राम मिट्टी के साथ उपयुक्त मात्रा मिलाकर नमूनों को धूप में रख दिया गया । सारणी 2 में उपचारों का विवरण दिया हुआ है । मिट्टी को समय-समय पर आसुत जल से सिक्त किया गया । तीन समयान्तरालों पर, 15, 30 तथा 45 दिन बाद, बीकरों में से मिट्टी के नमूने पृथक किये गये और उन्हें सुखाकर, चूर्णित करके विश्लेषण के लिये प्रयुक्त किया गया । पी-एच के निर्धारण 15 तथा 45 दिन पर लीड्स-नार्थप पी-एच मापी द्वारा किये गये । उपलब्ध सीसे का निर्धारण अमोनियम ऐसीटेट निष्कर्षण एवं डिथिजोन विधि का अनुगमन करते हुये किया गया । साथ ही उपलब्ध लौह की मात्रा ज्ञात की गई ।[3]

परिणाम तथा विवेचना

कार्बनिक पदार्थ का प्रभाव : मिट्टी को ग्लुकोस, पीट तथा कम्पोस्ट के साथ इनकुबेट करने से 15 दिनों के बाद मिट्टी में उपलब्ध सीसे की मात्रा में वृद्धि पाई गई किन्तु ज्यों-ज्यों यह अवधि बढ़ती गई, उपलब्ध सीसे की मात्रा में ह्रास देखा गया । जहाँ कार्बनिक पदार्थ की मात्रा अधिक थी, वहाँ अधिक सीसा उपलब्ध रूप में प्राप्त हुआ । तीनों स्रोतों में से ग्लुकोस सर्वाधिक प्रभावशाली प्रतीत हुआ । यहाँ तक कि मिट्टी के पी-एच में भी परिवर्तन हुआ ।

सारणी 2

उपचार	15 दिन विनिमेय Pb ppm	उपलब्ध Fe ppm	pH	30 दिन विनिमेय Pb ppm	उपलब्ध Fe ppm	45 दिन विनिमेय Pb ppm	उपलब्ध Fe. ppm	pH
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1. मिट्टी (नियंत्रण)	0·50	4·8	7·6	0·50	4·5	0·50	4·2	7·6
2. मिट्टी+0·5% ग्लुकोस	0·66	7·8	7·5	0·66	7·5	0·60	7·2	7·4
3. मिट्टी+1·0% ग्लुकोस	0·83	23·9	7·4	0·75	22·5	0·66	15·0	7·2
4. मिट्टी+2·0% ग्लुकोस	1·00	25·9	6·9	1·00	18·4	0·91	14·8	7·0
5. ,, +1·0% पीट	1·16	10·2	6·4	1·00	5·3	0·66	2·8	6·1
6. ,, +2·0% पीट	1·66	11·0	6·3	1·50	10·5	1·16	3·8	5·9
7. ,, +4·0% पीट	2·16	33·5	6·2	2·00	26·7	1·60	14·0	5·8
8. ,, +1·0% कम्पोस्ट	1·83	3·0	7·4	0·66	2·5	0·60	1·8	7·0
9. ,, +2·0% कम्पोस्ट	1·50	3·9	7·3	0·80	1·6	0·75	0·9	7·5
10. ,, +4·0% कम्पोस्ट	2·16	3·2	7·2	1·83	1·8	1·33	0·3	7·2
11. मिट्टी +25 ppm Pb	1·83	6·5	7·5	1·83	6·3	1·66	3·00	6·3
12. ,, +50 ppm Pb	3·83	3·5	7·7	3·66	1·5	3·00	2·1	7·7
13. ,, +100 ppm Pb	4·50	2·9	7·0	4·33	2·8	4·25	2·1	7·0
14. ,, +25 ppm Pb+0·5% ग्लुकोस	2·50	21·6	7·4	2·33	20·7	2·00	20·7	7·1
15. ,, +25 ppm Pb+1·0% ग्लुकोस	2·83	21·9	7·2	2·66	20·7	2·16	15·0	7·2
16. ,, +25 ppm Pb+2·0% ग्लुकोस	3·16	28·3	6·6	3·00	27·5	2·50	18·0	6·0
17. ,, +50 ppm Pb+0·5% ग्लुकोस	3·90	17·9	7·6	3·91	17·5	3·66	13·9	7·3

1	2	3	4	5	6	7	8	9
18. मिट्टी +50 ppm Pb+1·0% ग्लुकोस	4·00	18·7	7·2	4·00	18·5	3·00	18·0	7·3
19. ,, +50 ppm Pb+2·0% ग्लुकोस	4·16	63·5	5·4	3·83	62·5	3·00	47·0	6·0
20. ,, +100 ppm Pb+0·5% ग्लुकोस	4·66	23·9	7·2	4·66	22·5	4·00	15·0	7·4
21. ,, +100 ppm Pb+1·0% ग्लुकोस	4·66	65·5	7·2	4·50	60·0	3·91	47·8	7·0
22. ,, +100 ppm Pb+2·0% ग्लुकोस	4·75	73·5	5·5	4·50	67·5	4·16	57·5	4·9
23. मिट्टी +25 ppm Pb+1·0% पीट	2·00	9·2	6·6	1·86	7·5	0·75	1·1	6·3
24. ,, +25 ppm Pb+2·0% पीट	2·16	14·6	6·4	1·66	14·4	0·90	3·4	6·4
25. ,, +25 ppm Pb+4·0% पीट	2·83	35·0	5·8	1·83	26·7	1·00	14·0	5·6
26. ,, +50 ppm Pb+1·0% पीट	3·91	8·6	6·7	3·75	5·2	2·83	1·6	6·4
27. ,, +50 ppm Pb+2·0% पीट	4·16	18·7	6·6	3·66	13·2	3·50	5·1	6·2
28. ,, +50 ppm Pb+4·0% पीट	4·33	14·2	5·8	4·00	13·3	4·00	12·5	5·6
29. ,, +100 ppm Pb+1·0% पीट	4·66	11·0	6·6	4·25	8·8	3·63	2·4	6·1
30. ,, +100 ppm Pb+2·0% पीट	4·75	26·3	6·2	4·46	14·1	4·16	5·4	6·0
31. ,, +100 ppm Pb+4·0% पीट	4·93	35·5	5·6	4·46	30·5	4·00	17·7	5·2

1	2	3	4	5	6	7	8	9
32. मिट्टी +25 ppm Pb+1·0% कम्पोस्ट	2·50	3·3	7·3	1·75	2·4	1·70	0·7	6·5
33. ,, +25 ppm Pb+2·0% कम्पोस्ट	2·83	2·5	7·2	1·66	1·7	2·00	0·4	6·6
34. ,, +25 ppm Pb+4·0% कम्पोस्ट	3·00	2·1	7·0	2·33	1·5	1·83	1·4	7·2
35. ,, +50 ppm Pb+1·0% कम्पोस्ट	3·90	1·88	7·5	2·83	2·6	2·66	0·3	6·6
36. ,, +50 ppm Pb+2·0% कम्पोस्ट	4·00	3·3	7·3	3·50	1·7	2·00	1·6	7·1
37. ,, +50 ppm Pb+4·0% कम्पोस्ट	4·16	3·0	7·1	3·00	1·9	2·50	0·3	7·2
38. ,, +100 ppm Pb+1·0% कम्पोस्ट	4·53	2·9	7·0	3·50	2·8	3·35	0·6	6·6
39. ,, +100 ppm Pb+2·0% कम्पोस्ट	4·66	3·3	7·2	3·16	1·7	3·00	0·6	7·2
40. ,, +100 ppm Pb+4·0% कम्पोस्ट	4·80	2·2	6·9	3·66	1·5	2·83	1·6	7·2

उपलब्ध लोह पर प्रभाव : यह उल्लेखनीय है कि मिट्टी में सीसा की अधिक मात्रा मिलाने से उपलब्ध लोह की मात्रा घटती है किन्तु यदि कार्बनिक पदार्थों के साथ सीसा मिलाया गया तो पर्याप्त लोहे की मात्रा निष्कर्षित होती है। समय के साथ लोहे की इस मात्रा में कमी आई। स्पष्ट है कि सीसे के कारण उपलब्ध लोह की मात्रा प्रभावित होती है।

ऐसा प्रतीत होता है कि कार्बनिक पदार्थ मिलाने से मिट्टी में मे सीसा की अधिक मात्रा इसलिये निष्कर्षित हो सकी क्योंकि प्रारम्भ में COOH, फीनालिक तथा कीटोनिक समूह, जिनमें आक्सीजन की बहुलता रहती है, उपस्थित रहते हैं जिसके कारण मिट्टी से अधिकतम सीसा निष्कर्षित होता है। लेकिन समय के साथ कार्बनिक पदार्थों का कार्बन आक्सीकृत होता जाता है और सीसे के साथ अवक्षेप (सीसे के कार्बोनेट, फास्फेट तथा सल्फेट) बनाने वाले अम्लों का प्राधान्य हो जाता है। उपलब्ध लोह के बढ़ने का कारण भी कार्बनिक अम्लों का उत्पादन है। ग्लुकोस के कारण प्रारम्भ में तेजी के CO_2 बनती है जिससे पी-एच घट जाता है फलस्वरूप लोह का विलयनीकरण होता है। बाद में समय के साथ लोह की मात्रा

घटती जाती है। सीसा के डालने से लोह की मात्रा में उतना परिवर्तन नहीं होता जितना कि कार्बनिक पदार्थ के मिलाने से।

निर्देश

1. स्टैपल्स, ई० एल० जे०, **जर्न० साइंस टेक्ना०**, 1964, **10**, 129

2, विल्सन, ए० एल०, **स्काट० एग्रि०**, 1962, **42**, 87

3. सैंडेल, ई० बी०, Colorimetric Determination of Traces of Metals. द्वितीय संस्करण, इंटरसाइंस पब्लि० न्यूयार्क, 1950

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 1, January, 1980, Pages 55-60

अष्टि स्वरूप माइजर के G-फलन वाला एक समाकल समीकरण

एस० पी० छाबरा तथा बी० के० जोशी
गणित विभाग, शासकीय इंजीनियरी कालेज, उज्जैन

[प्राप्त—अगस्त, 23, 1977]

सारांश

एक समाकल समीकरण जिसकी अष्टि माइजर का G-फलन है, विपर्यस्त किया गया है। कतिपय ज्ञात समाकल समीकरणों के हल विशिष्ट दशाओं के रूप में पाये जाते हैं।

Abstract

An integral equation with Meijer's G-function as its kernel. *By* S. P. Chhabra and B. K. Joshi, Department of Mathematics, Government Engineering College, Ujjain.

An integral equation whose kernel is a Meijer's G-function has been inverted. The solutions of certain integ ral equations given earlier by Srivastava[1], Rusia[2], Joshi[3] follow as special cases.

1. प्रस्तावना

गणितीय भौतिकी के फलनों सम्बन्धी समाकल समीकरणों का हल अर्वाचीन अध्ययनों का विषय बन चुका है। इस प्रपत्र में एक समाकल समीकरण, जिसकी अष्टि माइजर के G-फलन के रूप में है, विपर्यस्त किया गया है। चूँकि G-फलन अत्यन्त व्यापक प्रकृति का है अतः प्राचलों के विशिष्टीकरण से हमारे परिणाम से कई ज्ञात फल निकलते हैं।

प्रस्तुत प्रपत्र का मुख्य परिणाम छाबरा तथा सिंह[4] के ज्ञात समाकल की निम्नलिखित विशिष्ट दशा पर आधारित है

$$\int_0^1 x^{\rho-1}(1-x)^{\beta-1}\, {}_mF_n\,[\alpha_m;\beta_n;cy(1-x)]\; G_{p,\,q}^{k,\,1}\left(xyz\middle/\begin{matrix}a_1,\ldots,a_p\\ b_{\cdot 1},\ldots,b_q\end{matrix}\right)dx$$

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m} (\alpha_j; r)\Gamma(\beta+r)\,(cy)^r}{\prod_{j=1}^{n} (\beta_j; r)\, r\,!} G_{p+1,\, q+1}^{k,\, l+1}\left(yz\middle| \begin{matrix} 1-\rho, a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q, 1-\rho-\beta-r \end{matrix}\right) \tag{1}$$

जहाँ α_m तथा β_n से क्रमशः प्राचलों के समुच्चय $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ एवं $\beta_1, \ldots, \beta_n$ का बोध होता है। यह सूत्र लागू होगा यदि $m \leqslant n$. $\beta_1, \ldots, \beta_n$ में से एक भी शून्य या ऋण पूर्णांक न हो, $R((\beta)>0$, $R(\rho+b_j)>0$, $j=1, 2, \ldots, k$; $p+q<2(k+1)$ तथा $|\arg yz|<(k+1-\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}q)\pi$.

हम निम्नांकित संकेतनों का उपयोग करेंगे

$$f(u, t)=(u-t)^{\rho-1}\, G_{p,\, q}^{k,\, 1}\left(z(u-t)\middle| \begin{matrix} a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q \end{matrix}\right) \tag{2}$$

$$g(v, u)=(v-u)^{\beta-1}\, {}_mF_n\, [\alpha_m; \beta_n; c(v-u)] \tag{3}$$

$$h(v, t)=\sum_{r=9}^{\infty} \frac{\prod_{j=1}^{m} (\alpha_j; r)\Gamma(\beta+r)}{\prod_{j=1}^{n} (\beta_j; r)\, r!} .\, c^r\, (v-t)^{\rho+\beta+r-1}$$

$$\times G_{p+1,\, q+1}^{k,\, l+1}\left(z(v-t)\middle| \begin{matrix} 1-\rho, a_1, \ldots, a_p \\ b_1, \ldots, b_q, (1-\rho-\beta-r \end{matrix}\right) \tag{4}$$

2. समाकल समीकरण

$$\int_t^1 f(u, t)\psi(u, t)\, du=\phi(t),\ t \in I \tag{5}$$

पर विचार करें जहाँ समाकल को रीमान रूप में लिया जाता है।

$I=\{t;\ a \leqslant t \leqslant 1\}$, $a>0$ अचर है तथा $\phi(t)$ को I के प्रति परिभाषित किया जाता है। यह परिकल्पित किया जाता है कि

(i) $m \leqslant n$ तथा $\beta_1, \ldots, \beta_n$ में से कोई शून्य या ऋण पूर्णांक नहीं है, $R(\beta)>0$, $R(\rho+b_j)>0$, $j=1, \ldots, k$ तथा $p+q<2(k+1)$;

(ii) $\phi(1)=0$ तथा

(iii) $\phi'(t)$ I के प्रति संतत है।

यदि ये प्रतिबन्ध तुष्ट होते हैं तो (5) का हल होगा

$$\psi(u, t)=-\int_u^1 \frac{g(v, u)}{h(v, t)}\, \phi'(v)\, dv \tag{6}$$

उपपत्ति

(5) के वामपक्ष में (6) से $\psi(u, t)$ के प्रस्तावित मान को रखने पर तथा समाकलन के क्रम को बदलने पर जो उक्त प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है

$$J = -\int_t^1 \frac{\phi'(v)}{h(v, t)} \left[\int_t^1 f(u, t)\, g(v, u)\, du\right] dv.$$

अब चर $u-t=x(v-t)=xy$ को बदलने एवं आन्तरिक समाकलन का मान निकालने हेतु (1) का उपयोग करने पर

$$J = -\int_t^1 \phi'(v)\, dv = \phi(t).$$

ऊपर (i) के प्रतिबन्ध $m \leqslant n$ को यदि आवश्यक हो तो ${}_mF_n$ [5, p. 73] के अभिसरण परिप्रेक्ष्य में संशोधित किया जा सकता है।

3. विशिष्ट दशायें

(a) $k=l=p=m=n=c=1, q=2, z=1$ रखने; β को δ, ρ को β, a_1 को $1-\alpha$, b_1 को शून्य, b_2 को $1-\beta$, α_1 को γ, β_1 को δ से प्रतिस्थापित करने एवं (7) का उपयोग करने पर हमें श्रीवास्तव[1] का ज्ञात फल प्राप्त होता है। अपरंच, यदि हम ${}_1F_1$ को $M_{k,\,\mu}$ के पदों में व्यक्त करें तो हमें रूसिया[2] द्वारा दी गई प्रमेय 1 प्राप्त होती है।

(b) $k=l=p=m=n=1, q=2, \lambda c=-\mu z=\mu\lambda/(\mu-\lambda)$ रखने, β को $\sigma-\beta$, ρ को β, a_1 को $1-\alpha$, b_1 को शून्य, b_2 को $1-\beta$, α_1 को $\sigma-\alpha$, β_1 को $\sigma-\beta$ द्वारा प्रतिस्थापित करने एवं (8) का उपयोग करने पर हमें रूसिया[2] द्वारा स्थापित प्रमेय 2 प्राप्त होती है।

समाकल सूत्र [6, p. 402, Eq. 3] सही नहीं है। दक्षिण पक्ष के संगमी हाइपरज्यामितीय फलन ${}_1F_1$ को ${}_1F_1\,(\alpha;\ \sigma, \mu-\lambda)$ न होकर ${}_1F_1\,(\sigma-\alpha;\ \sigma;\ \mu-\lambda)$ होना चाहिये। इस संशोधन के प्रकाश में $H(v, t)$ [2, p. 352] के व्यंजक को भी परिवर्द्धित किया जाना चाहिए।

(c) $c=0$ लेने पर (4) के दक्षिण पक्ष के समस्त पद, प्रथम के अतिरिक्त, लुप्त हो जाते हैं और हमें छाबरा तथा जोशी[7] का फल प्राप्त होता है।

पुन: यदि हम $l=p=z=1$, $k=q=2$, $\rho=-\lambda-k$, $\beta=\lambda$, $a_1=1+k$, $b_1=\frac{1}{2}-\mu$, $b_2=\frac{1}{2}+\mu$ लें और G-फलन को व्हिटेकर फलन $W_{k,\,\mu}(x)$ के रूप में व्यक्त करें तो हमें जोशी[3] का परिज्ञात परिणाम प्राप्त होगा।

यह ध्यान में रखना होगा कि फल [6. p. 405, Eq. 21] अशुद्ध है। इसके दक्षिण पक्ष में एक अतिरिक्त गुणक exp $(\frac{1}{2}x)$ भी होना चाहिए। फलत: जोशी[2] द्वारा प्रस्तुत $\psi(v, t)$ के परिवर्द्धित स्वरूप को निम्न प्रकार होना चाहिए :

$$\psi(v, t)=[(v-t)^{-k-1} e^{1/2(v-t)} W_{k+\lambda}, {}_{\mu}(v-t)]^{-1}.$$

(d) $k=n=c=1$, $1=p=q=m=2$, $z=-1$ रखने; β को $\delta-\rho$, a_1 को $1-\alpha$, a_2 को $1-\beta$, b_1 को शून्य, b_2 को $1-\rho$, α_1 को $\delta-\alpha$, α_2 को $\delta-\beta$, β_1 को $\delta-\rho$ से प्रतिस्थापित करने तथा (10) के उपयोग करने पर हमें (5) का हल निम्नलिखित रूप में प्राप्त होता है

$$\psi(u, t)=-\frac{\Gamma(\delta)}{\Gamma(\rho)\Gamma(\delta-\rho)} \int_u^1 \frac{g(v, u)}{h(v, t)} \phi'(v)\, dv.$$

जहाँ $f(u, t)=(u-t)^{\rho-1} {}_2F_1 (\alpha, \beta; \rho; u-t)$

$$g(v, u)=(v-u)^{\delta-\rho-1} {}_2F_1 (\delta-\alpha, \delta-\beta; \delta-\rho; v-u)$$

$$h(v, t)=(v-t)^{\delta-1} (1-v+t)^{\alpha+\beta-\delta} {}_2F_1 [\alpha, \beta; \delta; (v-t)(2-v+t)]$$

तथा प्रमुख फल के प्रतिबन्ध (i) के स्थान पर $0<R(\rho)<R(\delta)$ हो जाता है ।

4. यहाँ हम संक्षेप में श्रेणियों का संकलन दे रहे हैं जिनका उपयोग अनुभाग 3 में विशिष्ट दशाओं के प्राप्त करने में किया गया है:

(a) यदि β न तो शून्य हो न कोई ऋण संख्या हो तथा x सान्त हो, तो

$$J=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\gamma, n)\, x^n}{(\beta, n)\, n!} {}_1F_1 (\alpha; \beta+n; x)={}_1F_1 (\alpha+\gamma: \beta; x). \tag{7}$$

उपपत्ति

$$J=\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\gamma; n)\, (\alpha; k)\, x^{n+k}}{n!\, k!\, (\beta; n)\, (\beta+n; k)}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(\gamma; n)\, (\alpha; k)\, (-n; k)\, x^n}{n!\, k!\, (\beta; n)\, (1-\gamma-n; k)}$$

आन्तरिक श्रेणी को संकलित करने, गास प्रमेय[5] का उपयोग करने तथा सरलीकरण करने पर

$$J=\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha+\gamma; n)\, x^n}{n!\, (\beta; n)};$$

जिससे (7) की स्थापना होती है ।

(b) यदि (i) σ न तो शून्य हो, न ऋण संख्या

(ii) x तथा y ऐसी सान्त संख्यायें हैं कि $y\neq x$ तो

$$J=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sigma-\alpha;\, n)\, y^n}{(\sigma;\, n)\, n!}\, {}_1F_1\,(\alpha;\, \sigma+n;\, x)=e^x\, {}_1F_1\,(\sigma-\alpha;\, \sigma;\, y-x) \tag{8}$$

उपपत्ति

वाम पक्ष में ${}_1F_1$ में कुमर के प्रथम सूत्र [5, p. 125] को व्यक्त करने तथा प्रसारित करने पर

$$J=e^x \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sigma-\alpha;\, n)\,(\sigma-\alpha+n;\, k)\, y^n(-x)^k}{(\sigma;\, n)\,(\sigma+n;\, k)\, n!\, k!}$$

$$=e^x \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\sigma-\alpha;\, n)\,(-n;\, k)}{(\sigma;\, n)\, n!\, k!}\, y^n\,(x/y)^k$$

आन्तरिक श्रेणी को संकलित करने और

$${}_1F_0\,(a;\, -;\, z)=(1-z)^{-a} \tag{9}$$

का व्यवहार करने पर सम्बन्ध (8) स्थापित होता है।

(c) यदि (i) δ न तो शून्य हो न कोई ऋण पूर्णांक

(ii) $|\, c\,|<1$ तथा $|\, x\,|<1$; तो

$$J=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\delta-\alpha;\, n)\,(\delta-\beta;\, n)\, c^n}{(\delta;\, n)\, n!}\, {}_2F_1\,(\alpha,\, \beta;\, \delta+n;\, x)$$

$$=(1-c)^{\alpha+\beta-\delta}\, {}_2F_1\,(\alpha,\, \beta;\, \delta\colon x+c(1-x)) \tag{10}$$

उपपत्ति

वाम पक्ष में ${}_2F_1$ में प्रमेय 21, [5, p. 60] को सम्प्रयुक्त करने तथा प्रसारित करने पर

$$J=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\delta-\alpha;n)\,(\delta-\alpha+n;\, k)\,(\delta-\beta;\, n)\,(\delta-\beta+n;\, k)}{(\delta;\, n)\,(\delta+n;\, k)\, n!\, k!}\, c^n x^x\,(1-x)^{\delta-\alpha-\beta+n}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\delta-\alpha;\, n)\,(\delta-\beta;\, n)\,(-n;\, k)\, c^n(1-x)^{\delta-\alpha-\beta+n}[-x/c(1-x)]^k}{(\delta;\, n)\, n!\, k!}$$

आन्तरिक श्रेणी को संकलित करने तथा (9) का उपयोग करने पर

$$J=(1-x)^{\delta-\alpha-\beta}\, {}_2F_1\,[\delta-\alpha,\, \delta-\beta;\, \delta\colon x+c(1-x].$$

प्रमेय 21 [5, p. 60], का उपयोग करने से वांछित फल (10) की प्राप्ति होती है।

निर्देश

1. श्रीवास्तव, के० एन०, Jour. D' Analyse Mathematique, Jerusalem, 1964, **13**, 349.
2. रूसिया, के० सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस० इंडिया**, 1969. **39**, 349.
3. जोशी, वी० के०, The Mathematics Student, 1913, **41**, 407.
4. छाबरा, एस० पी० तथा सिंह, एफ०, **प्रोसी० केम्ब्रि० फिला० सोसा०**, 1969, **65**, 479.
5. रेनविले, ई० डी०, Special Functions, **मकमिलन कम्पनी न्यूयार्क**, 1969.
6. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms. **भाग** II, **मैकग्राहिल** 1954.
7. छाबरा, एस० पी० तथा जोशी, बी० के० (**प्रेषित**)

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No 1, January, 1980, Pages 61-63

लैक्टोबैसिलस बल्गैरिकस Au द्वारा शीरा से लैक्टिक अम्ल के किण्वन पर मधुका इण्डिका के फूलों के जलीय निष्कर्ष का प्रभाव

के० पी० तिवारी, अशोक पाण्डेय
तथा
पी० के० मिनोचा
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—दिसम्बर, 7 1978]

सारांश

लैक्टोबैसिलस बल्गैरिकस Au द्वारा शीरा से लैक्टिक अम्ल के उत्पादन पर **मधुका इन्डिका** के प्राकृतिक रूप से सूखे पुष्पों के जलीय निष्कर्ष के प्रभाव का अध्ययन किया गया है और यह पाया गया कि इस जलीय निष्कर्ष में लैक्टिक अम्ल के उत्पादन में वृद्धि करने की क्षमता है।

Abstract

Influence of aqueous extract of the flowers of Madhuca indica on lactic acid formation from molasses by lactobacillus bulgaricus Au*. *By* K. P. Tiwari, Ashok Pandey and P.K. Minocha, Chemistry Department, Allahabad Universtiy, Allahabad.

The influence of aqueous extract of naturally dried flowers of Madhuca indica on lactic acid production from molasses by Lactobacillus bulgaricus Au has been studied and it was observed that it causes marked imcrease in the yield of lactic acid.

लैक्टिक अम्ल जीवाणुओं की वृद्धि एवं सक्रियता बढ़ाने के लिये विभिन्न वैज्ञानिकों द्वारा विभिन्न फल-फूलों के प्रभाव का अध्ययन किया गया है (लूथी एवं वेस्त्व [1], फान एवं नीग्राई [2])। नाकागाकी और हिरैनो [3] ने पाया कि सोयाबीन के बीजों के जलीय निष्कर्ष में **लै० बलौरिकस** B-1 की सक्रियता को बढ़ाने की शक्ति है। कोगन एवं उसके सहकर्मियों [4] ने बताया कि टमाटर के रस की अधिक मात्रा लै० बल्गैरिकस के लिए हानिकारक होती है।

*लैक्टोबैसिलस बल्गैरिकस Au दही से निकाला गया।

प्रस्तुत पत्र में प्रयोक्ताओं द्वारा **मधुका इन्डिका** (महुवा) के फूलों के जलीय निष्कर्ष के प्रभाव का अध्ययन शीरा से **लै० बल्गैरिकस** Au द्वारा लैक्टिक अम्ल के किण्वनिक उत्पादन पर किया गया है।

प्रयोगात्मक

मधुका इन्डिका के 150g सूखे फूलों को चार घंटे तक आसुत जल (400 ml) के साथ गरम किया और विलयन को छानकर अलग कर लिया।

1080 g शीरा को दो लीटर जल में घोलकर प्राप्त विलयन को 54 बराबर भागों में बाँटा और प्रत्येक भाग को एक 250 ml धारिता वाले फ्लास्क में लिया। इन फ्लास्कों मे 15-15 फ्लास्कों के तीन समूह बनाये तथा प्रत्येक समूह को 3-3 फ्लास्कों के पाँच उपसमूहों में विभाजित किया। शेष बचे 9 फ्लास्कों को मानक-फ्लास्क बनाया। पहले से पाँचवें समूह के फ्लास्कों में क्रमश: 2, 4, 6, 8 और 10 ml उपरोक्त निष्कर्ष डाला। मानक-फ्लास्कों सहित सभी फ्लास्कों का आयतन आसुत जल मिलाकर 100 ml कर लिया। इन फ्लास्कों के मुंह को रुई के कार्क से बन्द कर उन्हें 15lb के वाष्प दाब पर आधे घंटे तक स्टेरिलाइज किया।

फ्लास्कों को ठंडा हो जाने पर उनमें **लै० बल्गैरिकस** Au के जीवाणु डाले तथा 47° पर एक उष्मा-कक्ष में रखा। किण्वन-काल में फ्लास्कों में $CaCO_3$ की थोड़ी-थोड़ी मात्रा डालकर उनके विलयनों का अम्लतामान (pH) 5·8-6·0 के बीच स्थिर रखा। 2, 4 और 6 दिन पश्चात् फ्लास्कों में उत्पादित लैक्टिक अम्ल तथा बची हुई शर्करा का कलरीमितीय विश्लेषण (बारकर एवं समरसन [5] डुबोयॉस एवं सहकर्मी [6]) किया।

परिणाम तथा विवेचना

मधुका इन्डिका के पुष्पों के जलीय निष्कर्ष का लैक्टिक अम्ल किण्वन पर प्रभाव

क्रम संख्या	जलीय निष्कर्ष की मात्रा	किण्वन काल (दिन)	उत्पादित लैक्टिक अम्ल (g/100 ml)	बची शर्करा (g/100 ml)
1.	मानक	2	1·00	3·29
		4	1·52	2·70
		6	1·95	2·26
2.	2·0 ml	2	1·02	3·27
		4	1·58	2·65
		6	2·00	2·25

3.	4·0 ml	2	1·12	3·16
		4	1·70	2·54
		6	2·18	2·06
4.	6·0 ml	2	1·10	3·17
		4	1·80	2·44
		6	2·20	1·98
5.	8·0 ml	2	1·18	3·10
		4	1·66	2·57
		6	2·20	1·95
6.	10·0 ml	2	1·00	3·29
		4	1·38	2·87
		6	2·13	2·06

विश्लेषण से प्राप्त परिणाम सारणी में दिखाये गये हैं। सारणी के आँकड़ों से स्पष्ट है कि जलीय निष्कर्ष की सभी प्रयोगात्मक सांद्रताओं पर लैक्टिक अम्ल की मात्रा मानक-मान से अधिक है। सबसे अधिक उत्पादन जलीय निष्कर्ष के 6 ml और 8 ml की प्रायोगिक सांद्रताओं पर हुआ है जो कि कुल शर्करा का 50% है।

निर्देश

1. लूथी, एच० तथा वेस्च, यू०, **मिटील गीबाइटे लीबेनस्म यू० हाइज०**, 1959, **50**, 264-275
2. फॉन, एल० तथा नीग्राई, आर०, **रेन्ड० इन्स्ट० सुपरसैनीटा**, 1955, **18** (1), 36-52
3. नाकागाकी, टी० तथा हिरैनो, एस०, **एग्री० बायो० केम०**, 1970, **34** (10), 1580-1583
4. कोगन, टी० एम०, गिलीलैण्ड, एस० ई० तथा स्पेक, एम० एल०, **एप्लाइड माइक्रोबायो०**, 1968, **16** (8), 1220-1224
5. बारकर, एस० बी० तथा समरसन, डब्लू० एच०, **जे० बायॉन० केम०**, 1941, **138**, 535
6. डुबोयॉस, एम०, गिलेस, के० ए०, हैमिल्टन, जे० के०, रेबेरस, पी० ए० तथा स्मिथ, एफ०, **एनालि० केम०**, 1956, **28**, 350-356

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 1, January, 1980, Pages 65-68

क्लोरोक्विन-क्यूप्रिक क्लोराइड संकुल

एस० एस० गुप्ता

रसायन प्रयोगशाला, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

तथा

कु० कुमुद गुप्ता

पी० एम० बी० गुजराती महाविद्यालय, इन्दौर

[प्राप्त—अक्टूबर, 13 1978]

सारांश

मलेरिया औषधियों में क्लोरोक्विन, क्यूप्रिक क्लोराइड के साथ ऐल्कोहल माध्यम में 1:2 संकुल बनाता है जैसा कि चालकता विधियों से एवं विश्लेषण आकड़ों से ज्ञात होता है। संकुल-संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम (ir) से भी की गई है।

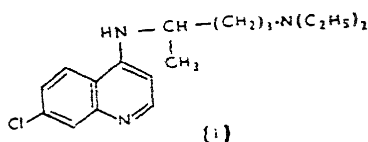
Abstract

Chloroquine-cupric-chloride complex. *By* S. S. Gupta and Ku. Kumud Gupta, Chemical Laboratories, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal.

Chloroquin, an antimalarial, forms 1 : 2 complex with cupric chloride in alcoholic solutions as indicated by conductivity measureaments and analytical data. Structure assigned is supported by ir spectral bands.

प्रयोगात्मक

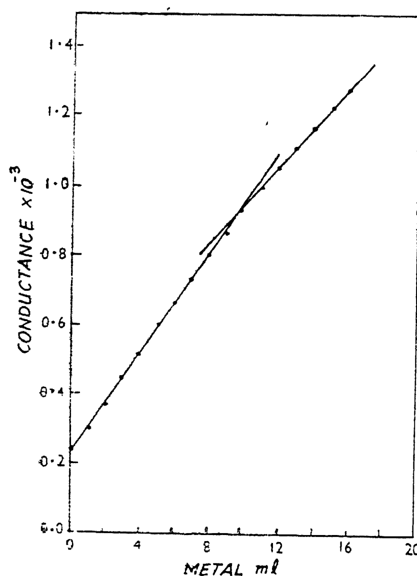
क्लोरोक्विन एक 4-अमिनो क्यूनोलीन व्युत्पन्न है, जिसे रसायन में 7-क्लोरो -4- (4 डाइ-एथिल अमिनो -1- मेथिल ब्यूटिल-अमिनो)- क्यूनोलीन के नाम से जानते हैं। धातुओं के साथ एन्टीमलेरियल के संकुलों के अध्ययन[1-6] को आगे बढ़ाते हुए प्रस्तुत शोधपत्र में क्लोरोक्विन-क्यूप्रिक क्लोराइड संकुल वर्णित किया गया है।



प्रयोगात्मक

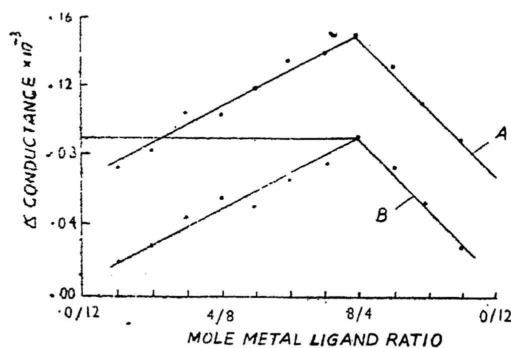
संकुल का संयोजन

(अ) क्लोरोक्विन फास्फेट (0·01 M) तथा क्यूप्रिक क्लोराइड (0·02 M) के मानक विलयन दो बार आसवित शुद्ध चालकता जल में बनाये गये । मूल यौगिक के 10 मि० ली० विलयन को 100 मि० ली० तक तनु किया गया तथा उसका अनुमापन धातु विलयन के साथ 'तोशनीवाल' चालकतामापी द्वारा 30° से० पर किया गया । आयतन संशोधन के बाद चालकता तथा धात्विक आयतन के बीच ग्राफ खींचा गया जो 1 : 2 क्लोरोक्विन-क्यूप्रिक क्लोराइड संकुल की पुष्टि करता है (चित्र 1) ।



चित्र 1

(ब) जाब[7] की संतत विचरण विधि द्वारा भी चालकता अध्ययनों में 1:2 क्लोरोक्विन-क्यूप्रिक क्लोराइड संकुल की पुष्टि होती है । इस हेतु मूल यौगिक तथा धातु के समआण्विक विलयन द्वारा दो सान्द्रताओं (0·005 M तथा 0·004 M) पर दो वक्र खींचे गये (चित्र 2) ।



चित्र 2

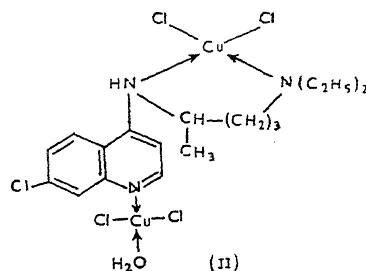
वियोजन तथा विश्लेषण

क्लोरोक्विन बेस (आधिक्य) तथा क्यूप्रिक क्लोराइड (2 ग्राम) को अलग-अलग परिशुद्ध ऐल्कोहल की अल्प मात्रा में घोला गया। लीगैन्ड तथा धातु के विलयन को संतत विलोडन के साथ मिलाया गया। फलस्वरूप हरे-पीले रंग का संकुल प्राप्त हुआ। मिश्रण को बर्फ में 3 घंटे तक ठंडा किया गया। संकुल को छानकर तथा धोकर शुद्ध किया गया। प्राप्ति 2·8 ग्राम। संकुल 140° से० पर अपघटित हो जाता है।

संकुल में Cu, 20·68,; Cl, 22·96; N, 7·04 तथा H_2O, 3·15% प्राप्त हुए जबकि $C_{18}H_{26}N_3$ Cl. (Cu Cl_2). H_2O में सिद्धांततः Cu, 20·94, Cl, 23·38, N, 6·93 तथा H_2O, 2·97% होना चाहिए।

विवेचना

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर क्लोरोक्विन-क्युप्रिक क्लोराइड संकुल को, मेपाक्रिन-मरक्यूरिक क्लोराइड संकुल[5] के अनरूप, संरचना II द्वारा निरूपित किया जा सकता है।



संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम (ir) अध्ययन द्वारा भी होती है, जिसमें धातु-नाइट्रोजन तथा धातु-आक्सीजन अवशोषण बैंड क्रमशः 650 एवं 660 cm^{-1} पर प्राप्त होता है। संकुल में एक जल अणु उप-सहसंयोजकता द्वारा बंधा है जिसकी पुष्टि 835 एवं 1650 cm^{-1} पर प्राप्त अवशोषण बैंड द्वारा होती है। संकुल का स्थायित्व स्थिरांक (log K=6·42) तथा तदनुसार मुक्त ऊर्जा परिवर्तन ($\triangle F=-8{\cdot}5$ किलोकैलोरी प्रति मोल) ज्ञात किया गया।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय प्रस्तुत प्रपत्र की तैयारी तथा मार्गदर्शन के लिये डा० आर० कौशल एवं शोधकार्य में सुविधाएँ प्रदान करने के लिये प्राचार्य, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यलय भोपाल, के आभारी हैं।

निर्देश

1. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1974, **51**, 649

2. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दीकी, एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न०इन्डियन केमि० सोसा०**, 1974, **51**, 769

3. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1975, **52**, 642

4. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दीकी, एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इन्डियन केमि० सोसा०**, 1976, **53**, 242

5. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1977, **20** (**3**), 223

6. गुप्ता, एस० ए०, सिद्दीकी एस० तथा कौशल, आर०, **सांइस एण्ड कल्चर**, 1977, **43**, 443

7. जाब, पी०, **एन० कीम०** 1928, **10**, 113 ; 1936, 10, 97

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 23. No. 1, January, 1980, Pages 69-75

r संमिश्र चरों वाले एक नवीन H-फलन सम्बन्धी समाकल

ए० के० सिंह तथा वाई० एन० प्रसाद
सम्प्रयुक्त गणित अनुभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—जून 24, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में r संमिश्र चरों वाले एक नवीन H-फलन को समाहित करने वाले कतिपय अनन्त समाकलों की स्थापना की गई है। कतिपय विशिष्ट दशायें भी प्राप्त की गई हैं।

Abstract

Integrals with respect to parameter involving a new H-function of r complex variables. *By* A. Kumar Singh and Y. N. Prasad, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

The present paper aims at establishing some infinite integrals involving a new H-function of r complex variables, defined by the authors elsewhere [4], in the integrand, where the integration is done with respect to a parameter. Some particular cases have also been derived and shown how the results obtained by Maheshwari [3] and Samar [5] etc, stand as special cases of our results.

1. विषय प्रवेश

हम श्रीवास्तवा तथा पंडा[6] की बराबरी में r संमिश्र चरों वाले एक नवीन H-फलन को निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं।

$$H^{0,\, n\, :\, 0\, :\, (M', N');\, \cdots;\, (M^{(r)}, N^{(r)})}_{p,\, q\, :\, q\, \,:\, R\, :\, [P', Q'];\, \cdots;\, [P^{(r)}, Q^{(r)}]}\left[\begin{matrix}\{(a_p;\, (\alpha^{(i)}_p)\, i=1, \ldots r)\}\, ::\\ \{(b_q;\, (\beta^{(i)}_q)\, i=1, \ldots, r)\}\, :\end{matrix}\right.$$

$$\times \left[\begin{matrix} \{(c'_{p'}, \gamma'_{p'})\}; \ldots; \{(c^{(r)}_{p^{(r)}}, \gamma'^{(r)}_{p^{(r)}})\} \\ \{(l_R; (U^{(i)}_R f^{(i)}_R)\, i=1, \ldots, r)\} : \{(d'_{Q'}, \delta'_{Q'})\}; \ldots; \{(d^{(r)}_{Q^{(r)}}, \delta^{(r)}_{Q^{(r)}})\} \end{matrix} \middle| \, x_1, \ldots, x_r \right]$$

$$= \frac{1}{(2\pi\omega)^r} \int_{L_1} \int_{L_r} \phi_1(s_1) \ldots \phi_r(s_r)\, \psi(s_1, \ldots, s_r)\, x_1^{s_1} \ldots x_r^{s_r}\, ds_1 \ldots ds_r. \qquad (1.1)$$

जहाँ

$$\phi_i(s_i) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{M^{(i)}} \Gamma(d^{(i)}_j - \delta^{(i)}_j s_i) \prod\limits_{j=1}^{N^{(i)}} \Gamma(1 - c^{(i)}_j + \gamma'^{(i)}_j s_i)}{\prod\limits_{j=M^{(i)}+1}^{Q^{(i)}} \Gamma(1 - d^{(i)}_j + \delta^{(i)}_j s_i) \prod\limits_{j=N^{(i)}+1}^{P^{(i)}} \Gamma(c^{(i)}_j - \gamma'^{(i)}_j s_i)}, \; i = 1, \ldots, r. \qquad (1\cdot2)$$

$$\psi(s_1, \ldots, s_r) = \frac{\prod\limits_{j=1}^{n} \Gamma(1 - a_j + \sum\limits_{j=1}^{r} \alpha^{(i)}_j s_i)}{\prod\limits_{j=1}^{q} \Gamma(1 - b_j + \sum\limits_{i=1}^{r} \beta^{(i)}_j s_i) \prod\limits_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j - \sum\limits_{i=1}^{r} \alpha^{(i)}_j s_i) \prod\limits_{j=1}^{R} \Gamma(l_j + \sum\limits_{i=1}^{r} U^{(i)}_j f^{(i)}_j s_i)}$$

(1·3)

यहाँ पर तथा इसके आगे सर्वत्र $\omega = (-1)^{1/2}$; (i) शीर्षाग्र के रूप में डैशों की संख्या के लिये प्रयुक्त है यथा $p^{(1)} = p'$, $p^{(2)} = p''$ इत्यादि: $\{(a_p; (a^{(i)}_p)_{i=1, \ldots, r})\}$ जो [6, (1976)] में $(a_p; a'_p, \ldots, a^{(r)}_p)$ के रूप में प्रदर्शित है वह p प्राचलों के अनुक्रम $(a_1; (a^{(i)}_1)_{i=1, \ldots, r}) (a_p; (a^{(i)}_p)_{i=1, \ldots, r})$ के लिये आया है, (1·2) तथा (1·3) में आगत $\alpha^{(i)}_j, \beta^{(i)}_j\ \gamma'^{(i)}_j, \delta^{(i)}_j, f^{(i)}_j$ धन वास्तविक तथा उसमें आये $a_j, b_j, c^{(i)}_j, d^{(i)}_j, l_j,$ संमिश्र संख्यायें हैं, रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है, $U^{(i)}_j$ एकक फलन हैं जिन्हें

$$U^{(i)}_j = \begin{cases} +1 \text{ यदि पद } f^{(i)}_j s_i \text{ का } j \text{ वें गुणक में धन संकेत हो} \\ -1 \text{ यदि पद } f^{(i)}_j s_i \text{ के } j \text{ वें गुणक में ऋण संकेत हो} \end{cases}$$

$i = 1, \ldots, r; j = 1, \ldots, R$ द्वारा व्यक्त किया जाता है।

और आगे दृष्टान्त हेतु, माना कि कोई J (चाहें तो 2 लें) $\psi(s_1, \ldots, s_r)$ के हर में गुणक है और $\Gamma(7 + 5s_1 + 10\, s_2 + \ldots 5\,(r-1) s_{r-1} - 57\, s_r)$ के रूप में है

$$l_2 - 7, f^{(i)}_2 = 5i \text{ क्योंकि } i = 1, \ldots, r-1, f^{(r)}_2 = 57$$

तथा

$$U_2^{(i)}=\begin{cases}+1 \text{ जब } i=1, \ldots, r-1, \\ -1 \text{ जब } i=r.\end{cases}$$

R एक अनृण पूर्णांक है जिसके द्वारा $\psi(s_1, \ldots s_r)$ के हर में मिश्रित संकेत पदों वाले Γ-फलन सूचित होते हैं। यह देखा जा सकता है कि $\prod_{j=1}^{R}$, $R=2^{r-1}$ में कि अ-पुनरावृत्त प्रकार के सभी सम्भव संयोगों को लिया जा सकता है (अपवादस्वरूप Γ-फलन हैं जिनमें सभी धन तथा ऋण संकेत पद हैं)। यह ध्यान देना महत्वपूर्ण होगा कि $R=8$ वह कारण नहीं है जिससे $r=4$ (हमारा H-फलन 4 चरों वाला है) माना गया है। इससे केवल इतना ही निश्चित हुआ जा सकता है कि मिश्रित संकेतों के केवल 8 Γ-फलन ही $\psi(s_1 \ldots s_r)$ के हर में विद्यमान हैं; फिर भी $R=0$ से ऐसे गुणकों की अनुपस्थिति पुष्ट होती है। विभिन्न प्राचलों के अन्य प्रतिबन्धों को निर्देश[6] तथा [4] में विस्तार से दिया गया है।

संमिश्र S_i-तल पर कंटूर L_i मेलिन-बार्नीज प्रकार का है और यह अपने दन्तुरों सहित $-\omega\infty$ से $+\omega\infty$ तक विस्तीर्ण है जिससे न केवल आश्वस्त हुआ जा सकता है कि ये कंटूर $(i=1, \ldots, r)$ समाकल्य की किसी विचित्रता को काटते नहीं और Γ-फलनों की दो प्रकार की अनावश्यक विचित्रताओं के सेटों को पृथक भी करते हैं। विभिन्न प्राचल ऐसे वर्जित हैं कि सबों के पोल सरल हैं और उनमें से कोई भी संगमी नहीं हैं।

अभिसरण के प्रतिबन्ध

माना कि $s_i=6_i+\omega\xi_i$ $(i=1, \ldots, r)$। Γ-फलन के उपगामी व्यवहार से सर्वप्रथम हमें देखने को मिलता है कि

$$|\phi_1(s_i)\ldots\phi_r(s_r)\,\psi(s_1, \ldots, s_r)| \sim \text{ß} \exp\{(-\pi/2)F(\xi_i, \ldots, \xi_r)\}.$$

जहाँ

$$F(\xi_1, \ldots, \xi_r)=\Big\{\sum_{i=1}^{r}\Big(\sum_{j=1}^{M^{(i)}}\delta_j^{(i)}\;|\xi_i|\Big)-\sum_{i=1}^{r}\Big(\sum_{j=M^{(i)}+1}^{Q^{(i)}}\delta_j^{(i)}\;|\xi_i|\Big)$$

$$+\sum_{i=1}^{r}\Big(\sum_{j=1}^{N^{(i)}}\gamma_j^{(i)}\;|\xi_i|\Big)-\sum_{i=1}^{r}\Big(\sum_{j=N^{(i)}+1}^{p^{(i)}}\gamma_j^{(i)}\;|\xi_i|\Big)-\sum_{j=1}^{q}\Big(\Big|\sum_{i=1}^{r}\beta_j^{(i)}\;\xi_i\Big|\Big)$$

$$+\sum_{j=1}^{n}\Big(\Big|\sum_{i=1}^{r}\alpha_j^{(j)}\;\xi_i\Big|\Big)-\sum_{j=n+1}^{p}\Big(\Big|\sum_{i=1}^{r}\alpha_j^{(i)}\;\xi_i\Big|\Big)-\sum_{j=1}^{R}\Big(\Big|\sum_{i=1}^{r}U_j^{(i)}f_j^{(i)}\;\xi_i\Big|\Big)\Big\} \qquad (1\cdot4)$$

यहाँ पर अनेक संख्यात्मक अचर तथा $|\xi_i|$ $(i=1, \ldots, r)$ के अनेक घातों को संकेत ß के अन्तर्गत समूहित कर दिया गया है। इस तरह समाकल (1·1) के परम अभिसरण के प्रतिबन्ध को एक प्रमेय के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

प्रमेय

यदि $F(\xi_1, ..., \xi_r) \geqslant F_1 | \xi_i | + ... + F_r | \xi_r |$ कतिपय धन अचरों $F_1, ..., F_r$ के लिये जहाँ $F(\xi_1, ..., \xi_r)$ को (1·4) द्वारा व्यक्त किया जाता है। तब बहु-समाकल (1·1) कम से कम

$$| \arg x_i | < \tfrac{1}{2}\pi F_i, i=1, ..., r. \tag{1·5}$$

क्षेत्र में परम अभिसारी होता है।

उपर्युक्त प्रमेय की उपपत्ति (1·1) के लिये उपगामी सम्बन्ध से भी तुरन्त ही निकलती है अतः पाठक स्वयं इसका समाधान कर लें। फिर भी r चर दशाओं के लिये चतुर्थांश विश्लेषण काफी जटिल हो जाता है अतः अभिसरण प्रतिबन्धों के उपयुक्त सेट को व्युत्पन्न करने में मुख्य समस्या उठती है $F(\xi_1, ..., \xi_r)$ की निम्नतर सीमाओं से अधिकतम को प्राप्त करना। यदि हम मान लें कि

$$V_i = \sum_{j=1}^{n} a_j^{(i)} - \sum_{j=n+1}^{p} a_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{q} \beta_j^{(i)} + \sum_{j=1}^{M^{(i)}} \delta_j^{(i)} - \sum_{j=M^{(i)}+1}^{Q^{(i)}} \delta_j^{(i)}$$

$$+ \sum_{j=1}^{N^{(i)}} \gamma_j^{(i)} - \sum_{j=N^{(i)}+1}^{P^{(i)}} \gamma_j^{(i)} - \sum_{j=1}^{R} f_j^{(i)}, i=1, ..., r, \tag{1.6}$$

तो $V_i > 0$ के लिये समाकल (1·1) परम अभिसरी होता है और H-फलन को परिभाषित करता है जो सेक्टरों में वैश्लेषिक है जिसे

$$| \arg x_i | < \tfrac{1}{2}\pi V_i; i=1, ..., r; \tag{1·7}$$

द्वारा व्यक्त किया जाता है, विन्दु $x_i=0$ को जानकर छोड़ दिया गया है। हम r चरों वाले H-फलन के लिये जो परिभाषित हुआ है लगातार संकुचित संकेत $H[x_1; ..., x_r]$ द्वारा प्रयुक्त करेंगे यदि किसी प्रकार का भ्रम उत्पन्न न हो। यह सरलता से स्थापित किया जा सकता है कि

$H[x_1, ..., x_r] = 0 (| x_1 |^{\alpha_1} ... | x_r |^{\alpha_r}), (x_1, ..., x_r)$ के लिये $(0, ..., 0)$ के प्रतिवेश में।

जहाँ

$$\alpha_i - \min Re\, (d_j^{(i)} / \delta_j^{(i)}); j=1, ..., M^{(i)}, i=1, ..., r. \tag{1·8}$$

पुनश्च, यदि $n=0$

$H[x_1, ..., x_r] = 0 (| x_1 |^{\beta_2} ... | x_r |^{\beta_r}), (x_1, ..., x_r)$ के लिये $(\infty, ..., \infty)$ के प्रतिवेश में।

जहाँ

$$\beta_i = \max Re\, ((c_j^{(i)} - 1) / \gamma_j^{(i)}); j=1, ..., N^{(i)}\ i=1, ..., r. \tag{1·9}$$

साहित्य में अभिसरण के लिये वैकल्पिक प्रतिबन्ध सेट हैं और इस प्रपत्र में यह मान लिया गया है कि उनमें से कम से कम एक तो लागू होता ही है।

संक्षेप में, इतना ही कहा जा सकता है कि विभिन्न प्राचलों के उपयुक्त विशिष्टीकरण से ऊपर परिभाषित H-फलन संगत G-फलनों (समस्त वास्तविक गुणांक इकाई के तुल्य), माइजर के G-फलन (R=0 भी), एक चरों वाले r H-फलनों का गुणनफल E-फलन आदि में समानीत हो जाता है।

2. इस अनुभाग में निम्नलिखित समाकलों की स्थापना की जावेगी:

$$\int_{-\infty}^{\infty} H^{0,\, n\,:\,0\,:\,(M',\,N');\,\dots;\,(M^{(r)},\,N^{(r)})}_{p,\,q\,:\,R\,:\,[P',\,Q'];\,\dots;\,[P^{(r)},\,Q^{(r)}]} \left[\begin{matrix} \{(a_{p-2};\,(\alpha^{(i)}_{p-2})\ i=1,\dots,r)\} \\ \{(b_{q-2};\,(\beta^{(i)}_{q-2})\ i=1,\dots,r)\} \end{matrix} \right.$$

$$(a_{p-1}+\tau;\,(\alpha^{(i)}_{p-1})\ i=1,\ \dots,\ r),\,(a_p+\tau;\,(\alpha^{(i)}_{p-1})\ i=1,\dots,r)::$$

$$(b_{q-1}+\tau;\,(\beta^{(i)}_{q-1})\ i=1,\dots,r),\,(b_q+\tau;\,(\beta^{(i)}_{q})\ \ i=1,\dots,r):\{(l_R;\,(U^{(i)}_R f^{(i)}_R)\ i=1,\dots.\ r)\}$$

$$\left. \begin{matrix} \{(c'_{P'},\,\gamma'_{P'})\};\,\dots;\,\{(c^{(r)}_{P^{(r)}},\,\gamma^{(r)}_{P^{(r)}})\} \\ :\{(d'_{Q'},\,\delta'_{Q'})\};\,\dots;\,\{(d^{(r)}_{Q^{(r)}},\,\delta^{(r)}_{Q^{(r)}})\} \end{matrix} \right| \left. x_1,\dots,x_r \right] d\tau$$

$$= H^{0,\, n+1\,:\,0\,:\,(M',\,N');\,\dots;\,(M^{(r)},\,N^{(r)})}_{p-1,\,q+2\,:\,R\,:\,[P',\,Q'];\,\dots;\,[P^{(r)},\,Q^{(r)}]} \left[\begin{matrix} (2-a_p-a_{p-1}+b_q+b_{q-1}; \\ \{(b_{q-2};\,(\beta^{(i)}_{q-2})\ i=1,\dots,r)\}, \end{matrix} \right.$$

$$(\beta^{(i)}_q+\beta^{(i)}_{p-1}-\alpha^{(i)}_p-\alpha^{(i)}_{p-1q})\,i=1,\dots,r),\,\{(a_{p-2};\,(\alpha^{(i)}_{p-2})\ i=1,\dots,r)\}::$$

$$(1+b_{q-1}-a_{p-1};\,(\beta^{(i)}_{q-1}-\alpha^{(i)}_{p-2})\ i=1,\dots,r),\,(1+b_{q-1}-a_p;\,(\beta^{(i)}_{q-1}-\alpha^{(i)}_p)\,i=1,\dots,r)$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$(1+b_q-a_p;\ \ (\beta^{(i)}_q-\alpha^{(i)}_p)\ i=1,\dots,r),\,(1+b_q-a_{p-1};\,(\beta^{(i)}_q-\alpha^{(i)}_{p-1})\,i=1,\dots,r)\,;$$

$$\left. \begin{matrix} \dots \quad \dots \quad \dots.\,\{(c'_{P'},\,\gamma'_{P'})\};\,\dots;\,\{(c^{(r)}_{P^{(r)}},\,\gamma^{(i)}_{P^{(r)}})\} \\ \{(l_R;\,(U^{(i)}_R f^{(i)}_R)\ i=1,\dots,r)\}:\{(d'_{Q'},\,\delta'_{Q'})\};\,\dots;\,\{(d'^{(r)}_{Q^{(r)}},\,\delta^{[r]}_{Q^{(r)}})\} \end{matrix} \right| \left. x_1,\dots,x_r \right] \qquad (2{\cdot}1)$$

जहाँ $\sum_{j=1}^{p} a_j - \sum_{j=1}^{q} b_j > 1$; $|\arg x_i| < \frac{1}{2}\pi V_i$, V_i को (1·7) द्वारा दिखाया जाता है तथा r $(\beta_q^{(i)} - \alpha_p^{(i)})$, $(\beta_{q-1}^{(i)} - \alpha_p^{(i)})$, $(\beta_q^{(i)} - \alpha_p^{(i)})$ एवं $(\beta_{q-1}^{(i)} - \alpha_{p-1}^{(i)})$ क्योंकि $i=1, \ldots, r$ में से कोई भी व्यंजक ऋण नहीं है।

यहाँ यह देखना होगा कि यदि उपर्युक्त व्यंजकों में से कुछ धन हों और कुछ ऋण तो उन्हें घात R के द्वारा समंजित कर लेना चाहिए।

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(h\tau)\, H^{0,n:0:(M',N');\ldots;(M^{(r)},N^{(r)})}_{p,q:R:[P',Q'];\ldots;[P^{(r)},Q^{(r)}]} \left[\begin{matrix} \{(a_{p-1};(\alpha_{p-1}^{(i)})\, i=1,\ldots,r)\} \\ \{(b_{q-1};(\beta_{q-1}^{(i)})\, i=1,\ldots,r)\} \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} (a_p+\tau;(\alpha_p^{(i)})\, i=1,\ldots,r):\ :\{(c'_{p'},\gamma'_{p'})\};\ldots, \\ (b_q+\tau;(\beta_q^{(i)})\, i=1,\ldots,r):\{(l_R:(U_R^{(i)} f_R^{(i)})\, i=1,\ldots,r)\}: \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \{(c^{(r)}_{P^{(r)}},\gamma^{(r)}_{P^{(r)}})\} \\ \{(d'_{Q'},\delta'_{Q'})\};\ldots:\{(d^{(r)}_{Q^{(r)}},\delta^{(r)}_{Q^{(r)}}\} \end{matrix} \right| x_1,\ldots,x_r \Bigg]\, d\tau$$

$$= \tfrac{1}{2}\{2\cos(\tfrac{1}{2}h)\}^{(a_p-b_q-1)} \sum_{\omega,-\omega} \exp\{\tfrac{1}{2}\omega h(1-a_p-b_q)\}$$

$$H^{0,n:0(M',N');\ldots;(M^{(r)},N^{(r)})}_{p-1,q:R:[P',Q'];\ldots;[P^{(r)},Q^{(r)}]} \left[\begin{matrix} \{(a_{p-1};(\alpha_{p-1}^{(i)})\, i=1,\ldots,r)\}\ :\ : \\ \{(b_{q-1};(\beta_{q-1}^{(i)})\, i=1,\ldots,r)\}, \end{matrix} \right.$$

$$\begin{matrix} \{(c'_{P'},\gamma'_{P'})\};\ldots;\{(c^{(r)}_{P^{(r)}},\gamma^{(r)}_{P^{(r)}})\}\ x_1(2\cos\tfrac{1}{2}h)^{\beta'_q-\alpha'_p} \\ (1-a_p+b_q;(\beta_q^{(i)}-\alpha_p^{(i)})\, i=1,\ldots,r):\{(l_R;(U_R^{(i)} f_R^{(i)})\, i=1,\ldots,r)\} \end{matrix}$$

$$\left. \begin{matrix} \exp\{\tfrac{1}{2}\omega h(\beta'_q+\alpha'_p)\},\ldots,x_r \\ :\{(d'_{Q'},\delta'_{Q'})\};\ldots;\{(d^{(r)}_{Q^{(r)}},\delta^{(r)}_{Q^{(r)}}\}) \end{matrix} \right| \begin{matrix} (2\cos\tfrac{1}{2}h)^{\beta_q^{(r)}-\alpha_p^{(r)}} \\ \exp\{\tfrac{1}{2}\omega h(\beta_q^{(r)}+\alpha_p^{(r)})\} \end{matrix} \Bigg] \tag{2·2}$$

जहाँ $0 \leqslant h < \pi$, $(\beta_q^{(i)} - \alpha_p^{(i)})$ में से कोई भी व्यंजक ऋण नहीं है तथा $Re(a_p - b_q) > 0$. यहाँ $\sum_{\varepsilon-\omega}$ बताता है कि संकलन के अन्तर्गत व्यंजक को ω के स्थान पर $-\omega$ रखकर जोड़ दिया जाना चाहिये।

3. परिणाम (2·1) तथा (2·2) की उपपत्ति

परिणाम (2·1) की स्थापना हेतु बाईं ओर के H-फलन को हम कंटूर समाकल रूप (1·1) में व्यक्त करते हैं और समाकलन के क्रम को परिवर्तित करते हैं जो सन्निहित समाकलों के परम अभिसरण के कारण वैध है। तदनन्तर परिणाम [2, p. 300 Eq. (2·1)] के सम्प्रयोग से तुरन्त ही परिणाम (2·1) प्राप्त होता है।

(2·2) की उपपत्ति भी इसी प्रकार से परिणाम [2, p. 299 Eq. (1·4)] के सम्प्रयोग से प्राप्त की जाती है।

4. विशिष्ट दशायें

(i) R=0, $r=1$ तथा (1.1) में आने वाले समस्त गुणांक $\alpha_j^{(i)}, \beta_j^{(i)}, \gamma_j^{(i)}, \delta_j^{(i)}$ को इकाई मान लेने पर परिणाम (2·1) माहेश्वरी द्वारा प्राप्त समाकल[3] में समानीत हो जाता।

(ii) चूँकि हमारे H-फलन में प्रायः समस्त विशिष्ट फलन आ जाते हैं, यथा G-फलन, ह्विटेकर फलन आदि, अतः विभिन्न उपयुक्त विशेषीकरणों के द्वारा समर का परिणाम[5] तथा साहित्य के अन्य प्राप्य परिणाम प्राप्त होंगे।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकगण प्रोफेसर आर० जी० बुशमैन (व्योमिंग, संयुक्त राज्य अमरीका) तथा प्रो० एच० एम० श्रीवास्तव (विक्टोरिया, बी० सी०) के आभारी हैं जिन्होंने प्रेरणा प्रदान की और परामर्श दिया।

निर्देश

1. बुशमैन, आर० जी०, (प्रेषित)
2. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, **भाग** 2, **मैकग्राहिल, न्यूयार्क,** 1954.
3. माहेश्वरी, एम० एल०, Math. Vesnik, 1960, **6(21)**, 283-87.
4. प्रसाद, वाई० एन०, तथा सिंह, ए० के०, **जर्न० साइं० रिसर्च०, बी० एच० यू० (प्रकाशनार्थ स्वीकृत)**
5. समर, एम० एस०, **जर्न० इण्डियन मैथ० सोसा०**, 1973, **37(1-4)**, 323.
6. श्रीवास्तव, एच० एम० तथा पंडा, आर०, Jour. Reine. Angew. Math, 1976, **288**, 129-245.

लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे,जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कर्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सकेंगे।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दूगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—

   फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०, **जाइट फिजिक० केमि०**, 1928, **150**, 80।

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) बिना मूल्य दिये जायँगे। इनके अतिरिक्त यदि और प्रतियाँ लेनी हों, तो लागत मूल्य पर मिल सकेंगी।

10. लेख **"सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"** इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

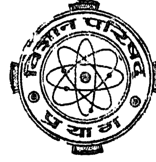
प्रबंध सम्पादक

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr. Sheo Gopal Misra,
M. Sc., D. Phil., F. N. A. Sc.



वार्षिक मूल्य : 8 रु० या 20 शि० या 4 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 2 रु० या 5 शि० या 1 डालर

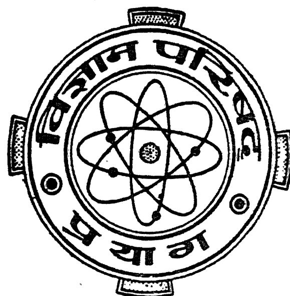
Annual Rs. 8 *or* 20 sh. *or* $ 4
Per Vol. Rs. 2 *or* 5 sh. *or* $ 1

मुद्रक :
के० राय, प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली एवेन्यू, प्रयाग

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्, प्रयाग
8025

Vijnana Parishad
Anusandhan Patrika
विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 23 April 1980 No. 2



The Research Journal of the Hindi Science Academy
Vijnana Parishad, Maharshi Dayanand Marg, Allahabad, India.

विषय सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 2, April 1980, Pages 77-81

बेटमैन के फलन वाले संवलयी परिवर्त पर कुछ प्रमेय

एच० एल० गुप्ता
राजकीय इंजीनियरिंग एवं प्रौद्योगिक महाविद्यालय, रायपुर

[प्राप्त—जून 1, 1979]

सारांश

बेटमैन के फलन वाले संवलयी परिवर्त पर कुछ प्रमेय प्राप्त किये गए हैं।

Abstract

Some theorems on convolution transform involving Bateman's functions. *By* H. L. Gupta, Government College of Engineering and Technology, Raipur.

Some theorems on convolution transform involving Bateman's function have been obtained.

1. भूमिका

रूसिया[5] और गुप्ता[3] ने एक समाकल समीकरण

$$\int_0^t K_{2n+2}\{(t-u)\}\, g(u)\, du = f(t) \tag{1.1}$$

का हल विभिन्न प्रतिबन्धों के अन्तर्गत विभिन्न रूपों में प्रस्तुत किया है। इन्होंने विडर[6] की विधि का उपयोग किया है। भारतीय[1] ने एक समाकल समीकरण का प्रतिलोमन दिया है जिसमें सावीकृत बेटमैन का फलन $K_{2n}^{z1}(x/2)$ निहित है। जोशी[4] ने सार्वीकृत बेटमैन के फलन $K_{2n}^{z_1}(a_x)$ वाले समाकल समीकरण के प्रतिलोमन पर कुछ प्रमेय प्रस्तुत किये हैं।

इस शोधपत्र में समीकरण (1.1) के प्रतिलोमन पर रूसिया[5] और गुप्ता[3] से भिन्न कुछ अन्य प्रमेय प्राप्त किये गए हैं। उल्लेखनीय है कि इन प्रमेयों को भारतीय[1] और जोशी[4] के प्रमेयों से व्युत्पन्न नहीं किया जा सकता।

2. उपपत्ति के लिये कुछ आवश्यक फल

लैप्लास परिवर्त

$$f(p)=L\{f(t)\}=\int_0^\infty e^{-pt} f(t)\,dt,\ \ Rep>0$$

को $f(p) \doteq f(t)$ द्वारा प्रदर्शित करेंगे । (2.1)

एर्डेल्यी [2, p, 129, p. 131, p, 175, p. 144] से हमें निम्नांकित की प्राप्ति होगी

$$p^n F(p) \doteq f^{(n)}(t),\ \text{यदि}\ f(0)=f'(0)$$
$$= \ldots = f^{(n-1)}(0)=0 \qquad (2.2)$$

$$F_1(p)\,.\,F_2(p) \doteq \int_0^t f_1(u)\,.\,f_2(t-u)\,du, \qquad (2.3)$$

जहाँ $F_1(p) \doteq f_1(t)$ और $F_2(p) \doteq f_2(t)$

$$(p+1)^n(p-1)^{-n-1} \doteq e^t L_n(-2t),\ \ Re(p-1)>0 \qquad (2.4)$$

$$2(-1)^n(p-1)^n(p+1)^{-n-2} \doteq K_{2n+2}(t)\ \ Rep>-1 \qquad (2.5)$$

$$\Gamma(n)\,.\,(p+a)^{-n} \doteq t^{n-1}\,e^{-at},\ \ Ren>0,\ \ Rep>-Rea \qquad (2.6)$$

हमें बहुज्ञात फल

$$(D-1)^n f(x)=e^x\,D^n\{e^{-x}, f(x)\} \qquad (2.7)$$

प्राप्त है जहाँ $D \equiv d/dx$

3. प्रमेय 1

माना कि

(i) $f'''(t)$ खण्डशः संतत है यदि $0 \leqslant t < \infty$

तथा (ii) $f(0)=f'(0)=f''(0)=0$, तो (1.1) का हल

$$g(t)=\frac{(-1)^n}{2}\int_0^t e^{(t-u)}\,.\,L_{n+2}\{2(u-t)\}\,.\,(D-1)^3 f(u)\,du \qquad (3.1)$$

होगा, जहाँ $D=d/du$ तथा L_{n+2} लागेर बहुपदी है ।

उपपत्ति

समीकरण (1.1) में (2.3) को व्यवहृत करने पर तथा (2.5) का उपयोग करने पर हमें

$$G(p)=\frac{(-1)^n}{2}\cdot\frac{(p+1)^{n+2}}{(p-1)^n}F(p) \tag{3.2}$$

प्राप्त होगा ।

पदों को पुनर्व्यवस्थित करने पर

$$G(p)=\frac{(-1)^n}{2},\frac{(p+1)^{n+2}}{(p-1)^{n+3}}(p-1)^3 F(p) \tag{3.3}$$

(3.3) के दोनों पक्षों का व्युत्क्रम लैप्लास परिवर्त लेने पर तथा (2.2), (2.3) और (2.4) का समप्रयोग करने पर हमें (1.1) का हल (3.1) के रूप में प्राप्त होगा ।

प्रमेय 2

प्रमेय 1 के उन्हीं प्रतिबन्धों के अन्तर्गत (1.1) के हल को निम्नवत् भी लिखा जा सकता है ।

$$g(t)=\frac{(-1)^n}{2}\int_0^t e^{(t-u)}\,.\,L_{n+1}\{2(u-t)\}\,(D^2-1)(D+1)\,f(u)\,du \tag{3.4}$$

इसे प्रमेय 1 की तरह सिद्ध किया जा सकता है ।

प्रमेय 3

माना कि

(i) n धन पूर्णांक है ।

(ii) $\left(\frac{d}{dt}\right)^2\{e^{-t}f(t)\}$ खण्डशः संतत है, जब $0\leqslant t<\infty$

तथा (iii) $f(0)=f'(0)=0,$

तो (1.1) का हल

$$g(t)=\frac{(-1)^n}{2}\,.\,e^t\left(\frac{d}{dt}\right)^2\{e^{-t}f(t)\}$$
$$+(-1)^n e^t\int_0^t L_{n+1}^{(1)}\{2(u-t)\}\,.\left(\frac{d}{du}\right)^2\{e^{-u}f(u)\}\,du \tag{3.5}$$

होगा ।

उपपत्ति

हम सम्बन्ध (3.2) को

$$G(p)=\frac{(-1)^n}{2}\left(1+\frac{2}{p-1}\right)^{n+2}, (p-1)^2F(p) \qquad (3.6)$$

के रूप में लिखते हैं। फल (2.6) का उपयोग करने पर यह सरलता से प्रदर्शित किया जा सकता है कि

$$\left(1+\frac{2}{p-1}\right)^{n+2}=1+L\left\{e^t\sum_{r=1}^{n+2}\binom{n+2}{r}\frac{2^rt^{r-1}}{r-1\,!}\right\}=1+L\{2(n+2)e^t{}_1F_1(-n-1;\,2;$$

$$=1+L\left\{2e^t\,L_{n+1}^{(1)}(-2t)\right\}^{-2t} \qquad (3.7)$$

(3.7) का (3.6) में उपयोग करने पर तथा व्युत्क्रम लेने पर (2.2) तथा (2.7) के प्रकाश में हमें (1.1) का हल (3.5) के रूप में प्राप्त होता है। स्पष्ट है कि हमें

$$g(0)=\frac{(-1)^n}{2}\left[e^t\left(\frac{d}{dt}\right)^2\{e^{-t}f(t)\}\right]_{t=0}$$

प्राप्त हुआ।

प्रमेय 4

माना कि (i) $f''(t)$ खंडशः संतत है यदि $0\leqslant t<\infty$, तथा (ii) $f(0)=f'(0)=0$, तो (1.1) का हल

$$g(t)=\frac{(-1)^n}{2}\{f^{(2)}(t)-f(t)\}+(-1)^n\int_0^t e^{(t-u)}\,.\,L_n^{(1)}\{2(u-t)\}.$$

$$.\{f^{(2)}(u)-f(u)\}\,du. \qquad (3.8)$$

होगा।

उपपत्ति

हम सम्बन्ध (3.2) को

$$G(p)=\frac{(-1)^n}{2}\left(1+\frac{2}{p-1}\right)^{n+1}.\,(p^2-1)\,F(p) \qquad (3.9)$$

के रूप में लिख सकते हैं। प्रमेय 3 की तरह (3.9) से (3.8) की प्राप्ति सरलता से की जा सकती है। यहां

$$g(0)=\frac{(-1)^n}{2}f^{(2)}(0)$$

प्राप्त होगा।

निर्देश

1. भारतीय, पी० एल०, **जर्न० इण्डियन मैथ० सोसा०, न्यू सिरीज**, 1964, **28** (3-4), 163.
2. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral transforms, भाग 1, मैकग्राहिल 1954.
3. गुप्ता, एच० एल०, **विज्ञान परि० अनु० पत्रिका**, 1974, **17**, 115.
4. जोशी, बी० के०, **विज्ञान परि० अनु० पत्रिका**, 1975, **18**, 319.
5. रूसिया, के० सी०, **प्रोसी० नेश० एके० साइंस इंडिया**, 1967, **37(1)**, 67-70.
6. विडर, डी० बी०, **अमे० मैथ० मंथली**, 1963, **70**, 291-293.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 2, April, 1980, Pages 83-92

दो चरों वाले बुशमान के H-फलन के लिये फूरियर श्रेणी

वाई० एन० प्रसाद तथा संकठा प्रसाद
सम्प्रयुक्त गणित अनुभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—जनवरी 1, 1979]

सारांश

दो चरों वाले बुशमान के H-फलन सम्बन्धी चार सांत समाकलों की स्थापना करते हुये इनका उपयोग फूरियर श्रेणी को सत्यापित करने के लिये किया गया है।

Abstract

Fourier series for Buschman's H-function of two variables. *By* Y. N. Prasad and Sankatha Prasad, Applied Mathematics Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

After establishing four definite integrals involving Buschman's H-function of two variables, these integrals have been used for establishing the Fourier series for Buschman's H-function.

1. प्रस्तावना

हाल ही में बुशमान[1] ने मित्तल तथा गुप्ता,[6] प्रसाद तथा गुप्ता[7] आदि के द्वारा परिभाषित एवं प्रदर्शित दो चरों वाले H-फलन का सार्वीकरण किया है। उन्होंने दो चरों वाले H-फलन के द्विगुण कंटूर समाकल के समाकल्य में आये Γ फलनों के गुणनफलों तथा लब्धियों के अभिसरण पर विचार किया है। दो चरों वाले H-फलन की नवीन संकुचित परिभाषा निम्नवत है।

$$H[x, y; (\alpha, a, A)_m; (\beta, b, B)_n; L_C, L_e]$$

$$=(2\pi i)^{-2}\int_{L_t}\int_{L_s} \theta(s, t)\, x^s\, y^t\, ds\, dt \tag{1·1}$$

जहाँ $\theta(s, t)=\prod_{j=1}^{m} \Gamma(\alpha_j+a_j s+A_j t)/\prod_{j=1}^{n} \Gamma(\beta_j+b_j s+B_j t)$ (1·2)

इसमें यही प्रतिबन्ध है कि $(Re\,(\alpha_j+a_j c+A_j C)$ समस्त j के लिये तथा समस्त (x, y) के लिये परिभाषित हैं, m, n धन संख्यायें हैं तथा बड़े अक्षर a_j, A_j, b_j B_j से वास्तविक (पिछली परिभाषाओं में धनात्मक वास्तविक के स्थान पर) संख्यायें हैं तथा ग्रीक अक्षर संमिश्र संख्याओं को बताते हैं। यदि j के किसी मान के लिये दोनों a_j, A_j (या b_j तथा B_j) शून्य हों तो एक अचर गुणक $\Gamma(\alpha_j)$(या $\Gamma\beta_j$) प्रकट होता है। मानकीकरण के लिये हम मान लेते हैं कि $\theta(s, t)$ में से ऐसे गुणकों को छोड़ दिया गया है।

संकेतन से सूचित होता है कि H-फलन चुने गये कंटूरों पर आश्रित है। प्राचलों के त्यक्त धनात्मकता परिकल्पना के फलस्वरूप श्रीवास्तव तथा जोशी[16] के संकेतन को हम संकुचित कर सकते हैं। Γ-फलनों से सम्बन्धित परिकल्पिना इसकी गांरटी देती है कि अक्षों पर कोई विचित्रता नहीं है अतः समाकल्य कंटूरों पर विश्लेषी है। ($x\neq 0, y\neq 0$, मान लेने का प्रचलन है) फलस्वरूप समाकल्य को दो वास्तविक चरों (ξ, η) का संमिश्र फलन माना जा सकता है जहाँ $s=c+i\xi$, $t=c+i\eta$। बुशमान[5–6] ने (1·1) के अभिसरण के कुछ और भी प्रतिबन्ध दिए हैं जो निम्नवत हैं

$$|\arg x| < \left[\sum_{j=1}^{m} |a_j| - \sum_{j=1}^{n} |b_j|\right](\pi/2) \tag{1·3}$$

$$|\arg y| < \left[\sum_{j=1}^{m} |A_j| - \sum_{j=1}^{n} |B_j|\right](\pi/2) \tag{1·4}$$

यदि प्राचलों aj, A_j में से कुछ शून्य हों तो अभिसरण प्रतिबन्ध (1·3) तथा (1·4) निम्नलिखित रूप में लिये जावेंगे

$$|\arg x| < \left[\sum_{A_j=0} |a_j| - \sum_{B_j=0} |b_j|\right](\pi/2) \tag{1·5}$$

$$|\arg y| < \left[\sum_{a_j=0} |A_j| - \sum_{b_j=0} |B_j|\right](\pi/2) \tag{1·6}$$

पुनः बुशमान[1] ने $|x|$ तथा $|y|$ के लघु तथा वृहद मानों के लिये $|H([x, y]|$ हेतु कोटि का निर्धारण किया है। इसके लिये हम समस्त चरों तथा निम्नलिखित प्रतिबन्धों हेतु $x=\rho e^{i\phi}$, $y=\sigma e^{i\psi}$, $s=w+i\xi$, $t=\zeta+i\eta$ रूप का व्यवहार करेंगे। फलन b वर्ग $b^{(2)}[(w_1, w_2), (\zeta_1, \zeta_2)]$ से सम्बन्धित है यदि पट्टी $w_1\leqslant Re\,(s)\leqslant w_2$, $\zeta_1\leqslant Re\,(t)\leqslant\zeta_2$ में फलन तथा चरघातांकी आकलों की तुष्टि करे

$$|f(s, t)| \leqslant M \exp(-\phi_0 |\xi| - \psi_0 |\eta|), \tag{1·7}$$

फलन F वर्ग $B^{(2)}[\phi_0, \psi_0]$ से सम्बन्धित होता है यदि ($x=0$ या $y=0$ पर बिन्दुओं के सम्भावित अपवाद-स्वरूप) कोणीय क्षेत्र $|\phi|<\phi_0$, $|\psi|<\psi_0$ में फलन विश्लेषी हो तथा घात आकल

$$|F(x, y)| \leqslant N \rho^{-w_1} \sigma^{-1\zeta}, \rho\leqslant 1, \sigma\leqslant 1, \tag{1·8}$$

की तुष्टि करे जहाँ M, N धन अचर हैं।

$(0, 0)$ के निकट (x, y) के लिये

$$| H[x, y] | \leqslant N | x |^{w_2} | y |^2 \tag{1·9}$$

(∞, ∞) के निकट (x, y) के लिये

$$| H[x, y] \leqslant N | x |^{-M_1} | y |^{-M_2} \tag{1·10}$$

(1·1) द्वारा परिभाषित दो चरों वाला H-फलन दो H-फलनों के गुणनखण्ड में टूट जाता है जिनमें से प्रत्येक एक चर का हो यदि समस्त j के मानों के लिये $a_j A_j=0$ तथा $b_j B_j=0$ अर्थात्

$$H[x, y; (a, a, o)_{m'}, (a, o, A)_{m''}; (\beta, b, o)_{n'}, (\beta, o, B)_{n''}; L_C, L_c]$$
$$=H[x; (a, a)_{m'}; (\beta, b)_{n'}; L_C]\, H[y; (a, A)_{m''}, (\beta, B)_{n''}; L_c] \tag{1·11}$$

जहाँ $$H[x; (a, a)_m: (\beta, b)_n; L_c]=\frac{1}{2\pi i}\int_{Re(s)=c} \theta(s)\, x^s\, ds \tag{1·12}$$

जहाँ $$\theta(s)=\prod_{j=1}^{m} \Gamma(a_j+a_j s)/\prod_{j=1}^{n} \Gamma(\beta_j+b_j s) \tag{1·13}$$

समीकरण (1·12) को फाक्स[5] द्वारा दी गई एक चर के लिये H-फलन की परिभाषा की तुलना में विस्त-र-परिभाषा के रूप में माना जा सकता है।

2. मुख्य परिणाम

इस अनुभाग में दो चरों वाले बुशमान के H-फलन सम्बन्धी 4 सांत समाकलों की स्थापना की जावेगी। इन समाकलों का उपयोग अनुभाग 3 में दिये गये बुशमान के H-फलन के लिये फूरियर श्रेणी की स्थापना हेतु किया जावेगा

$$\int_0^{\pi} (\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2k} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^2\, H[x(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2h}(\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2h}$$
$$y(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2k} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2k_1}; (a, a, A)_m; (\beta, b, B)_n; L_C, L_c]\, d\theta$$
$$=H[x, y; (a, a, A)_m, (\rho+\tfrac{1}{2}, h, k), (\rho_1+\tfrac{1}{2}, h_1, k_1);$$
$$(\beta, b, B)_n, (\rho+\rho_1+1, h+h_1, k+k_1); L_C, L_v] \tag{2·1}$$

बशर्ते कि $Re\,(2\rho_1+1+2h_1w_2+2k_1\zeta_2)>0$, $Re(2\rho+1+2hw_2+2k\zeta_2)>0$,

$$| \arg x\, [< \left[\sum_{j=1}^{m} | a_j | - \sum_{j=1}^{n} | b_j |\right] (\pi/2),\ | \arg y | < \left[\sum_{j=1}^{m} | A_j | - \sum_{j=1}^{a} | B_j |\right] (\pi/2),$$

जहाँ w_2 तथा ζ_2 समीकरण (1·9) द्वारा प्राप्त होते हैं।

$$\int_0^\pi \cos p\theta\, (\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1}\, H[x(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2h_1} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2h_1}$$

$$y(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2k} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2k_1}; (\alpha, a, A)_m; (\beta, b, B)_n; L_C, L_c]\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(-p-\rho+\frac{1}{2})}{\Gamma(-p)\Gamma(-p+\frac{1}{2})} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-p+\frac{1}{2}+r)\Gamma(-p+r)}{\Gamma(-p-\rho+\frac{1}{2}+r)\Gamma(\frac{1}{2}+r)} \frac{1}{r!}\, H[x, y; (\alpha, a, A)_m,$$

$$(p+\rho+\tfrac{1}{2}, h, k), (\rho_1+\tfrac{1}{2}, h_1, k_1), (\rho+\tfrac{1}{2}+r_r\, h, k)\, (\beta, b, B)_n,$$

$$(p+\rho+\rho_1+1, h+h_1, k+k_1), (\rho_1+\tfrac{1}{2}, h, k); L_C, L_c], \qquad (2{\cdot}2)$$

बशर्ते कि $p=0, 1, 2, \ldots$, तथा (2·1) में दिये गये प्रतिबन्ध तुष्ट हों।

$$\int_0^\pi \int_0^\pi \cos p\theta, \cos q\theta\, (\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1} (\cos \tfrac{1}{2}\phi)^{2\sigma} (\sin \tfrac{1}{2}\phi)^{2\sigma_1}$$

$$H[x(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2h} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2h_1}, y(\cos \tfrac{1}{2}\phi)^{2k} (\sin \tfrac{1}{2}\phi)^{2k_1}; (\alpha, a, A)_m,$$

$$(\beta, b, B)_n; L_C, L_c]\, d\theta\, d\phi$$

$$= \frac{\pi}{\Gamma(-p)\Gamma(-q)\Gamma(-p+\frac{1}{2})\Gamma(-q+\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-p+r)\Gamma(-q+r)\Gamma(-p+\frac{1}{2}+r)\Gamma(-q+\frac{1}{2}+r)}{\{\Gamma(\frac{1}{2}+r)\, r!\}^2}$$

$$H[x, y; (\alpha, a, A)_m, (p+\rho+\tfrac{1}{2}, h, o), (\rho_1+\tfrac{1}{2}, h_1, o), (\rho+\tfrac{1}{2}+r, h, o)$$

$$(-q-\sigma+\tfrac{1}{2}, o, k), (-\rho-p+\tfrac{1}{2}, (-h), o), (q+\sigma+\tfrac{1}{2}, o, k), (\sigma_1+\tfrac{1}{2}, o, k_1)$$

$$(-\sigma_1+\tfrac{1}{2}r, o, k); (\beta; b, B)_n, (p+\rho+\rho_1+1, h+h_1, o), (-p-\rho+\tfrac{1}{2}+r, h, o)$$

$$(q+\sigma+\sigma_1+1, o, k+k_1), (-q-\sigma+\tfrac{1}{2}+r, o, k); L_C, L_c], \qquad (2{\cdot}3)$$

बशर्ते कि $p, q=0, 1, 2, \ldots; Re(2\rho_1+2h_1+1)>0, Re(2\rho+2k_1+1)>0,$

$$|\arg x| < \left[\sum_{j=1}^{m} |a_j| - \sum_{j=1}^{n} |b_j|\right](\pi/2), \quad |\arg y| < \left[\sum_{j=1}^{m} |A_j| \sum_{j=1}^{n} B_j\right](\pi/2),$$

जहाँ ζ_2 तथा w_2 समीकरण (1·9) द्वारा प्राप्त होते हैं

$$\int_0^\pi \sin(2r+1)\theta\, (\cos\theta)^{2\rho} (\sin\theta)^{2\rho_1}\, H[x(\cos\theta)^{2h} (\sin\theta)^{2h_1},$$

$$y(\cos\theta)^{2k} (\sin\theta)^{2k_1}; (\alpha, a, A)_m; (\beta, b, B)_n; L_C, L_c]\, d\theta$$

$$= \frac{\sqrt{\pi}\,\Gamma(2r+2)}{\Gamma(-r+\frac{1}{2})\Gamma(-r)} \sum_{p=0} \frac{\Gamma(-r+o)\Gamma(-r+\frac{1}{2}+p)}{\Gamma(\frac{1}{2}+p)\, p!}\, H[x, y; (\alpha, a, A)_m,$$

$$(\rho+r+\tfrac{1}{2}, h, k), (\rho_1+p+1, h_1, k_1), (-r-\rho_1+\tfrac{1}{2}, h_1, k_1);$$

$$(\beta, b, B)_n, (r+\rho+\rho_1+\tfrac{3}{2}, h+h_1, k+k_1), (-r+p-\rho_1+\tfrac{1}{2}, h_1, k_1); L_C, L_c] \qquad (2{\cdot}4)$$

बशर्ते कि $r=0, 1, 2, \ldots; (\rho_1+h_1w_2+k_1\zeta_2+1)>0$

$$|\arg x|<\left[\sum_{j=1}^{m}|a_j|-\sum_{j=1}^{n}|b_j|\right](\pi/2), \ |\arg y|<\left[\sum_{j=1}^{m}|A_j|-\sum_{j=1}^{n}|B_j|\right](\pi/2),$$

जहाँ w_2 तथा ζ_2 को समीकरण (1·9) द्वारा प्राप्त करते हैं।

परिणाम (2·1), (2·2), (2·3) एवं (2·4) की उपपत्ति

परिणाम (2·1) को सिद्ध करने के लिये हम निम्नलिखित मानक समाकल से प्रारम्भ करते हैं

$$\int_0^{\pi}(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1}\,d\theta=\frac{\Gamma(\rho+\frac{1}{2})\Gamma\rho_1(+\frac{1}{2})}{\Gamma(\rho+\rho_1+1)}, \tag{2·5}$$

बशर्ते कि $Re(\rho)>0$, $Re(\rho_1)>0$.

(2·1) के वामपक्ष में दो चरों वाले बुशमान के H-फलन को मेलिन-बार्नीज प्रकार के कंटूर समाकल के रूप में व्यक्त करने एवं दिये हुये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत समाकलन के क्रम को परिवर्तित करने पर, जो वैध है, हमें निम्नलिखित प्राप्त होता है

$$(2\pi i)^{-2}\int_{L_C}\int_{L_c}\frac{\sum_{j=1}^{m}\Gamma(a_j+a_js+A_jt)}{\sum_{j=1}^{n}\Gamma(\beta_j+b_js+B_jt)}x^sy^t\,ds\,dt$$

$$\int_0^{\pi}(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho+2hs+2kt}(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1+2h_1s+2k_1t}\,d\theta \tag{2·6}$$

अब परिणाम (2·5) की सहायता से आन्तरिक समाकल ज्ञात करने पर (2·6) निम्न परिणाम में समानीत हो जाता है।

$$(2\pi i)^{-2}\int_{L_C}\int_{L_c}\theta(s,t)x^sy^t\frac{\Gamma(\rho+hs+kt+\frac{1}{2})\Gamma(\rho_1+\frac{1}{2}+h_1s+k_1t)}{\Gamma(\rho+\rho_1+h+h_1s+k+k_1s+1)}\,ds\,dt \tag{2·7}$$

प्राचलों की उपयुक्त व्यवस्था करने पर परिणाम (2·1) प्राप्त होता है।

इसी प्रकार परिणाम (2·2), (2·3) तथा (2·4) निम्नलिखित मानक परिणामों को व्यवहृत करके सिद्ध किये जा सकते हैं

$$\int_0^{\pi}\cos p\theta\,(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}(\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1}\,d\theta$$

$$=\frac{\Gamma(p+\rho+\frac{1}{2})\Gamma(\rho_1+\frac{1}{2})}{\Gamma(p+\rho+\rho_1+1}\,{}_3\Gamma_2\left[\begin{matrix}\rho_1+\frac{1}{2}, -p, -p+\frac{1}{2}\\ -p-\rho+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\end{matrix};1\right], \tag{2·8}$$

बशर्ते कि $Re(\rho)>0$, $Re(\rho_1)>0$;

तथा

$$\int_0^{\pi} \sin(2r+1)\theta\, (\cos\theta)^{2\rho}\, (\sin\theta)^{2\rho}\, d\theta$$

$$\frac{\Gamma(2r+2)\Gamma(r+\rho+\frac{1}{2})\Gamma(\rho_1+\frac{1}{2})}{\Gamma(r+\rho+\rho_1+3/2)\Gamma(2r+1)}\ {}_3F_2\left[\begin{matrix}\rho_1+1,\ -r,\ -r+\frac{1}{2}\\ -r-\rho+\frac{1}{2},\ 3/2\end{matrix};\ 1\right], \qquad (2\cdot 9)$$

बशर्ते कि $Re(\rho)>0$, $Re(\rho_1)>0$.

3. इस अनुभाग में दो चरों वाले बुशमान-H-फलन के लिये फूरियर श्रेणी स्थापित की जावेगी,

$$(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho}\, (\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1}\, H[x(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2h}\, (\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{2h_1},$$

$$y(\cos\tfrac{1}{2}\theta)^{2k}\, (\sin\tfrac{1}{2}\theta)^{2k_1};\ (a,\ a,\ A)_m;\ (\beta,\ b,\ B)_n;\ L_C,\ L_c]$$

$$=\frac{1}{\pi}\, H[x,\ y;\ (a,\ a,\ A)_m,\ (\rho+\tfrac{1}{2},\ h,\ k),\ (\rho_1+\tfrac{1}{2},\ h,\ k_1);\ (\beta,\ b,\ B)_n$$

$$(\rho+\rho_1+1,\ h+h_1,\ k+k_1);\ L_C,\ L_c]+\frac{2}{\pi}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{\Gamma(-p-\rho+\frac{1}{2})\Gamma(-p-r)}{\Gamma(-p)\Gamma(-p+\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{2}+r)}$$

$$\frac{\Gamma(-p+\frac{1}{2}+r)}{\Gamma(-p-\rho+\frac{1}{2}+r)}\frac{1}{r!}\ H(x,\ y;\ (a,\ a,\ A)_m,\ (p+\rho+\tfrac{1}{2},\ h,\ k),\ (\rho_1+\tfrac{1}{2},\ h_1,\ k_1),$$

$$(\rho_1+\tfrac{1}{2}+r,\ h,\ k);\ (\beta,\ b,\ B)_n,\ (p+\rho+\rho_1+1,\ h+h_1,\ k+k_1),\ (\rho+\tfrac{1}{2},\ h,\ k);$$

$$L_C,\ L_c]\cos p\theta. \qquad (3\cdot 1)$$

बशर्ते कि $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, तथा (2·1) में दिये गये प्रतिबन्ध तुष्ट हों,

$$(\cos\theta)^{2\rho}\, (\sin\theta)^{2\rho}\, H[x(\cos\theta)^{2h}\, (\sin\theta)^{2k_1},\ y(\cos\theta)^{2k}\, (\sin\theta)^{2k_1},\ (a,\ a,\ A)_m;\ (\beta,\ b, B)_n$$
$$L_C,\ L_c]$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{p=1}\sum_{r=0}\frac{\Gamma(2p+2)\Gamma(-p+r)\Gamma(-p+\frac{1}{2}+r)}{\Gamma(-p+\frac{1}{2})\Gamma(-p)\Gamma(\frac{1}{2}+r)\, r!}\ H[x,\ y;\ (a,\ a,\ A)_m,$$

$$(\rho+p,\ h,\ k),\ (\rho_1+p+1,\ h_1,\ k_1),\ (-p-\rho_1+\tfrac{1}{2},\ h_1,\ k_1);\ (\beta,\ b,\ B)_n,$$

$$(p+\rho+\rho_1+3/2,\ h+h_1,\ k+_1),\ (-p+r-\rho_1+\tfrac{1}{2},\ h_1,\ k_1)\ L_C,\ L_c]\sin(2p+1)\theta, \quad (3\cdot 2)$$

बशर्ते कि $Re(\rho_1+h_1w_1+k_1\zeta_1+1)>0$,

$$|\arg x|<\left[\sum_{j=1}^{m}|a_j|-\sum_{j=1}^{n}|b_j|\right](\pi/2),\ |\arg y|<\left[\sum_{j=1}^{m}|A_j|-\sum_{j=1}^{n}|B_j|\right]\ (\pi/2)$$

जहाँ w_2 तथा ζ_2 समीकरण (1·9) द्वारा प्राप्त किये जाते हैं,

परिणाम (3·1) को सिद्ध करने के लिये हम कल्पना करते हैं कि

$$f(\theta)=(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1} H[(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2h} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2h_1},$$

$$y(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2k} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2k_1}; (\alpha, a, A); (\beta, b, B)_n; L_C, L_c]$$

$$=\tfrac{1}{2}C_0+\sum_{p=1}^{\infty} C_p \cos p\theta. \qquad (3{\cdot}3)$$

अब (3·3) को 0 से π के मध्य θ के प्रति समाकलित करने और परिणाम (2·1) को प्रयुक्त करने पर हमें C_0 प्राप्त होता है।

पुनः (3·3) के दोनों पक्षों को $\cos p\theta$ से गुणा करने और 0 से π के मध्य θ के प्रति समाकलित करने, परिणाम (2·2) एवं कोसाइन फलनों के लाम्बिक गुणों को प्रयुक्त करने पर

$$C_p=\frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{p=1}^{\infty} \frac{\Gamma(-p-\rho+\tfrac{1}{2})}{\Gamma(-p)\Gamma(-p+\tfrac{1}{2})} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-p+r)\Gamma(-p+\tfrac{1}{2}+r)}{\Gamma(-p+\tfrac{1}{2}+\rho+r)\Gamma(\tfrac{1}{2}+r)} \frac{1}{r!}$$

$$H[x, y; (\alpha, a, A)_m, (p+\rho+\tfrac{1}{2}, h, k), (\rho_1+\tfrac{1}{2}, h_1, k_1), (\rho_1+\tfrac{1}{2}+r, h, k);$$

$$(\beta, b, B)_n, (p+\rho+\rho_1+1), (h+h_1, k+k_1) (\rho+\tfrac{1}{2}, h, k); L_C, L_c]. \qquad (3{\cdot}4)$$

अन्त में (3·3) में c_0 तथा C_p के मान रखने पर हमें परिणाम (3·1) प्राप्त होता है।

परिणाम (3·2) को सिद्ध करने के लिये माना कि

$$f(\theta)=\sum_{p=1}^{\infty} C_p \sin (2p+1)\theta \qquad (3{\cdot}5)$$

जहाँ $f(\theta)=(\cos)^{2\rho} (\sin)^{2\rho_1} H[x(\cos \theta)^{2h} (\sin \theta)^{2h_1} y(\cos \theta)^{2k}$

$(\sin \theta)^{2k_1}; (\alpha, a, A)_m; (\beta, b, B)_n; L_C, L_c]$.

(3·5) के दोनों पक्षों में $\sin (2p+1)\theta$ से गुणा करने तथा 0 से π के बीच समाकलित करने एवं साइन फलनों के लाम्बिक गुणों को व्यवहृत करने पर

$$C_p=\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(2p+1}{\Gamma(-p+\tfrac{1}{2})\Gamma(-p)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\Gamma(-p+r)\Gamma(-p+\tfrac{1}{2}+r)}{\Gamma(\tfrac{1}{2}+r)\, r!} H[x, y; (\alpha, a, A)_m,$$

$$(\rho+p, h, k), (\rho_1+p+1, h, k), (p-\rho_1+\tfrac{1}{2}, h_1, k_1) (\beta, b, B)_n,$$

$$(p+\rho+\rho_1+3/2, h+h_1, k+k_1), (-p+r-\rho_1+\tfrac{1}{2}, h_1, k_1); L_C, L_c]. \qquad (3{\cdot}6)$$

(3·5) में C_p के इस मान को रखने पर हमें वांछित फल प्राप्त होता है।

4. विशिष्ट दशायें

(i) समस्त j के लिये $a_jA_j=0$ तथा $b_jB_j=0$ दोनों मानने पर दो चरों वाला H-फलन दो H-फलनों में जिनमें से प्रत्येक एक चर वाला है गुणनखण्डित हो जाता है और परिणाम (2·1) निम्न परिणाम में समानीत हो जाता है ।

$$\int_0^{\pi} (\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1} H[x(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2h} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2h_1} (a, a)_{m'}, (\beta, b)_{n'}; L_C]$$

$$H[y(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2k} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2k_1} (a, A)_{m''}, (\beta, B)_{n''}; L_c] \tag{4·1}$$

$$=H[x, y; (a, a, o)_{m'}, (\beta, b, o)_{n'}, (\rho+\tfrac{1}{2}, h, k), (\rho_1+\tfrac{1}{2}, h_1, k_1);$$

$$(a, o, A)_{m''}, (\beta, o, B)_{n''}, (\rho+\rho_1+1, h+h_1, k+k_1); L_C, L_c],$$

बशर्ते कि $Re(\rho_1+h_1w_2+k_1\zeta_2)>-\tfrac{1}{2}$, $Re(\rho+hw_2+k\zeta_2)>-\tfrac{1}{2}$

$$|\arg x|<\left[\sum_{j=1}^{m}|a_j|-\sum_{j=1}^{n}|b_j|\right](\pi/2),\ |\arg y|<\left[\sum_{j=1}^{m}|A_j|-\sum_{j=1}^{n}|B_j|\right](\pi/2)$$

तथा ζ_2, w_2 समीकरण (1·9) द्वारा प्राप्त किये जाते हैं ।

इस प्रकार के रोचक परिणाम (2·2) 2·3), (2·4), (3 1) तथा (3·2) में से प्रत्येक से प्राप्त किये जा सकते हैं ।

(ii) $m'=2, n'=2, a_1=\mu, a=\tfrac{1}{2}, a_1=-1, a_2=1, \beta=1, \beta_2=1+\mu, b_1=1=b_2$

मानने तथा एर्डेल्यी के परिणाम[4] को व्यवहृत करने पर समाकल (4·1) निम्न परिणाम में समानीत हो जाता है

$$\int_0^{\pi} (\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1} J_{\mu}^2 [x^{1/2} (\cos \tfrac{1}{2}\theta)^h (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{h_1}]$$

$$H[y(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2k} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2k_1} (a, A)_{m''}, (\beta, B)_{n''}; L_C]\, d\theta.$$

$$=\frac{1}{\sqrt{\pi}} H[x, y; (\mu, -1, o), (\tfrac{1}{2}, 1, o); (1, 1, o), (1+\mu, 1, o);$$

$$(\rho+\tfrac{1}{2}, h, k), (\rho_1+\tfrac{1}{2}, h_1, k_1); (a, o, A)_{m''}, (\beta, o, B)_{n''},$$

$$(\rho+\rho_1+1, h+h_1, k+k_1); L_C, L_c], \tag{4·2}$$

बशर्ते कि $Re(\rho_1+\mu h_1+k_1\zeta_2)>-\tfrac{1}{2}$, $Re(\rho+\mu h_2+k_2\, \zeta_2>-\tfrac{1}{2}$

$$|\arg x|<\left[\sum_{j=1}^{m}|a_j|-\sum_{j=1}^{n}|b_j|\right](\pi/2),\ |\arg y|<\left[\sum_{j=1}^{m''}|A_j|-\sum_{j=1}^{n''}|B_j|\right](\pi/2)$$

तथा ζ_2 समीकरण (1·9) से प्राप्त होता है ।

(iii) $m'=3, n'=1, a=\mu+\nu, a_2=\mu-\nu, a_3=\mu, a_1=-1=a_2=a_3, \beta=\mu+\frac{1}{2}, b=-1,$ मानने तथा एर्डेल्यी के परिणाम[4] को व्यवहृत करने पर समाकल (4·1) निम्न समाकल में समानीत हो जाता है,

$$\int_0^\pi (\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho+2h} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1+2h_1} x^\mu K_\nu^2 \{x^{1/2} \cos \tfrac{1}{2}\theta)^h (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{h_1}\}$$

$$H[y(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2k} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2k_1} (\alpha, A)_{m''}, (\beta, B)_{n''}; L_C]\, d\theta$$

$$=\frac{\sqrt{\pi}}{2} H[x, y; (\mu+\nu, -1, o), (\mu-\nu, -1, o), (\mu, -1, o)$$

$$(\mu+\tfrac{1}{2}, -1, o), (\rho+\tfrac{1}{2}, h, k), (\rho_1+\tfrac{1}{2}, h_1, k_1); (\alpha, o, A)_{m''}, (\beta, o, B)_{n''}$$

$$(\rho+\rho_1+1, h+h_1, k+k_1); L_C, L_c]. \tag{4·3}$$

बशर्ते कि $Re(2\rho+2h\mu+h\nu+2k\zeta_2)>-1$, $Re(2\rho_1+2h_1\mu+h_1\nu+2k_1\zeta_2)>-1$,

$$|\arg x|<\sum_{j=1}^{m'} |a_j|-\sum_{j=1}^{n'} |b_j|\Big] (\pi/2), \ |\arg y <\left[\sum_{j=1}^{m''} |A_i|-\sum_{j=1}^{n''} |B_j|\right] (\pi/2).$$

जहाँ ζ_2 को समीकरण (1·9) से प्राप्त करते हैं।

(iv) $m''=3, n''=1, \alpha_1=\nu, \alpha_2=0, \sigma_3=\frac{1}{2}, A_1=-1=A_2, A_3=1, \beta=1+\nu, B=1,$ मानने तथा एर्डेल्यी का परिणाम[4] व्यवहृत करने पर समाकल (4·2) निम्नलिखित समाकल में समानीत हो जाता है

$$\int_0^\pi (\cos \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho} (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{2\rho_1} J_\mu^2 \{x^{1/2} (\cos \tfrac{1}{2}\theta)^h (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{h_1}\} 2\pi^{1/2}$$

$$I_\nu\{y^{1/2} (\cos \tfrac{1}{2}\theta)^k (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{k_1} K\{y^{1/2}(\cos \tfrac{1}{2}\theta)^k (\sin \tfrac{1}{2}\theta)^{k_1}\}\, d\theta$$

$$=\frac{1}{2\pi} H[x, y, (\mu, -1, 0), (\tfrac{1}{2}, 1, 0); (1, 1, 0), (1+\mu, 1, 0; 1)$$

$$(\rho+\tfrac{1}{2}, h, k), (\rho_1+\tfrac{1}{2}, h_1, k_1): (\nu, o, -1) (o, o, -1), (\tfrac{1}{2}, o, 1)$$

$$(1+\nu, 0, 1), (\rho+\rho_1+1, h+h_1, k+k_1); L_C, L_c], \tag{4·4}$$

बशर्ते कि $Re(2\rho+h\mu+2k\nu)>-1$, $Re(2\rho_1+h_1\mu+2k_1\nu)>-1$,

$$|\arg x|<\left[\sum_{j=1}^{m} |a_j|-\sum_{j=1}^{n} |b_j|\right] (\pi/2),$$

$$|\arg y|<\left[\sum_{j=1}^{m''} |A_j|-\sum_{j=1}^{n''} |B_j|\right] (\pi/2).$$

निर्देश

1. वुशमान, आर० जी०, **इण्डियन जर्न० मैथ०**, 1978, **20** **(प्रकाशनाधीन)**

2. वही, **ज्ञानाभा (प्रकाशनाधीन)**

3. वही, अप्रकाशित आंकड़े

4. एर्डेल्यी, ए०, Tables Integral Transforms, **भाग I**, 1954, पृष्ठ 376-77

5. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429

6. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, **प्रोसी० इंडियन एके० साइंस**, 1972, **A(3)**, 117-123

7. प्रसाद, वाई० एन० तथा गुप्ता, आर० के०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1975, **18**, 261-268

8. प्रसाद, वाई० एन० तथा सिद्दीकी, ए०, **डिफेन्स जर्नल**, 1975, **25**, 107-114

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 2. April, 1980, Pages 93-98

किसी अचर चूषण युक्त सपाट पट्टिका की परिवर्ती गति के कारण किसी श्यान असंपीड्य तरल का द्रवचुम्बकीय प्रवाह

नेवल किशोर
गणित विभाग, काशी हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त— नवम्बर 27, 1979]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में किसी सूक्ष्म रंध्र युक्त अनन्त सपाट पट्टिका के निकट किसी वैद्युत चालक, असंपीड्य श्यान तरल की परिवर्ती गति का शुद्ध हल उस स्थिति के लिये निकाला गया है जिसमें पट्टिका एकसमान अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र के अन्तर्गत समय के साथ चरघातांकी रूप से गतिमान है और पट्टिका अचर चूषणयुक्त है। यह माना गया है कि विचाराधीन तरल पट्टिका के एक तरफ फैला रहता है और दूसरी तरफ चूषित होता रहता है। वेग-वितरण और उपरिस्तर घर्षण के व्यंजक प्राप्त किये गये हैं और प्राप्त परिणामों को ग्राफ द्वारा भी प्रदर्शित किया गया है।

Abstract

Hydromagnetic flow of a viscous incompressible fluid due to unsteady motion of a flat plate with constant suction. *By* Newal Kishore, Department of Mathematics, Banaras Hindu University, Varanasi.

In the present paper, an exact solution of the unsteady motion of an electrically conducting, incompressible and viscous fluid near an infinite porous flat plate moving exponentially with time in its own plane with constant suction, in the presence of uniform transverse magnetic field is obtained. It is assumed that the fluid extends on one side of the wall and is sucked away to the other side. Expressions for the velocity profile and skin friction have been obtained. The results have also been stated graphically.

1. प्रस्तावना

किसी श्यान, असंपीड्य तरल के लिये द्वि-विमीय परिसीमा स्तर की समस्या का अध्ययन लाइटहिल[3] ने किया है। उन्होंने उपर्युक्त समस्या का हल निम्न और उच्च आवृति-सन्निकटन की दशाओं

में प्राप्त किया । स्टूआर्ट[4] ने अचर चूषण युक्त तल पर धारावेग में उच्चानयन होने से किसी अनन्तपट्टिका थर्मामीटर के उपरिस्तर-घर्षण और ताप में होने वाली अनुक्रिया का अध्ययन किया । दुबे[1] ने उस स्थिति के लिये किसी असंपीड्य, अल्प चालक तरल के प्रवाह पर अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र और अचरचूषण के प्रभाव का अध्ययन किया जिसमें स्वतंत्र धारावेग समय के साथ एकघाततः परिवर्तित हो रहा हो । किसी ऐसी अपरिमित सूक्ष्मरध्रमय अचरचूषणयुक्त सपाट पट्टिका के निकट जो कि अपने ही तल में समय के साथ चरघातांकी रूप से गतिमान है, किसी श्यान असंपीड्य तरल प्रवाह के लिये नेवियर स्टोक्स समीकरण का हल नेवलशिोर और पाण्डे[2] ने ज्ञात किया है । प्रस्तुत शोध पत्र में एकसमान अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र की उपस्थिति में किसी अपरिमित सूक्ष्मरन्ध्रमय सपाट पट्टिका पर किसी श्यान असंपीड्य वैद्युत चालक तरल के अचरचूषण युक्त प्रवाह का अध्ययन उस स्थिति में किया गया है जिसमें पट्टिका अपने ही तल में समय के साथ चरघातांकी रूप से गतिमान है ।

2. गति समीकरण और उनके हल

x'-अक्ष को प्लेट की दिशा में और y'-अक्ष को प्लेट के लम्बवत् लेने पर, प्रस्तुत समस्या के लिये सांतत्य समीकरण और संवेग समीकरण निम्नांकित रूपों में प्राप्त होते हैं:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'}+u'\frac{\partial u'}{\partial x'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}=\nu\left(\frac{\partial^2 u'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}\right)-\frac{\sigma}{\rho}B_0^2 u' \qquad (2{\cdot}1)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'}+u'\frac{\partial v'}{\partial x'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y'}+\nu\left(\frac{\partial^2 v'}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}\right) \qquad (2{\cdot}2)$$

$$\frac{\partial u'}{\partial x'}+\frac{\partial v'}{\partial y'}=0 \qquad (2{\cdot}3)$$

जिनमें B_0 वाह्य चुम्बकीय क्षेत्र, σ तरल की विद्युत चालकता, ρ घनत्व, p दाब और ν तरल की शुद्ध गतिक श्यानता प्रदर्शित करते हैं । विमीय राशियों को डैश से सूचित करते हैं ।

हम यह मान लेते हैं कि सम भौतिक राशियाँ, x' से स्वतंत्र हैं । सरलता के लिये हम यह भी मान लेते हैं कि तरल की श्यानता, वैद्युत चालकता और चुम्बकीय पारगम्यता आदि भौतिक गुण अचर हैं । द्रव की चुम्बकीय प्रांड्ल संख्या भी इतनी कम है कि प्रेरित विद्युत धारा चुम्बकीय क्षेत्र को प्रभावित नहीं कर पाती है अर्थात् अनुप्रयुक्त क्षेत्र निश्चित रूप से प्रवाह क्षेत्र से अप्रभावित रहता है । समीकरण (2·1) में प्रयुक्त सभी विद्युतचुम्बकीय राशियाँ मात्रकों की विद्युतचुम्बकीय पद्धति में मापी गई हैं । अतएव उपर्युक्त समीकरण निम्नलिखित समीकरणों में परिणत हो जाते हैं:

$$\frac{\partial u'}{\partial t'}+v'\frac{\partial u'}{\partial y'}=\nu\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}-\frac{\sigma}{\rho}B_0^2 u', \qquad (2{\cdot}4)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial t'}+v'\frac{\partial v'}{\partial y'}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y'}+\nu\frac{\partial^2 v'}{\partial y'^2}, \qquad (2{\cdot}5)$$

$$\frac{\partial v'}{\partial y'}=0; \qquad (2{\cdot}6)$$

जिनके लिये परिसीमा प्रतिबन्ध निम्नलिखित हैं:

$y'=0$ के लिये $$u'=U_0'\,[a_0+\epsilon \sum_{n'=1}^{\infty} C_{n'}\, e^{\pm n't'}] \qquad (2{\cdot}7a)$$

और $y'\to\infty$ के लिये $$u'=0 \qquad (2{\cdot}7b)$$

जहाँ पर U_0' कोई निर्देश वेग है। a_0, n' धनात्मक स्थिरांक हैं और ϵ एक छोटी राशि है। संकलन के अन्तर्गत निहित श्रेणी इस प्रकार की है कि जैसे-जैसे n' बढ़ता है, $C_{n'}$ घटता जाता है। फलतः श्रेणी का अभिसरण बना रहता है।

यद्यपि, समीकरण (2·6) यह प्रदर्शित करता है कि v' केवल काल का फलन है लेकिन हम v' को एक ऋणात्मक स्थिरांक $(-v_0')$ मानकर विवेचन को कुछ और सीमित कर लेते हैं जिससे यह निष्कर्ष निकलता है कि p, y' से स्वतंत्र है। अतएव समीकरण (2·4)

$$\frac{\partial u'}{\partial t'}-v_0'\frac{\partial u'}{\partial y'}=\nu\frac{\partial^2 u'}{\partial y'^2}+\frac{\sigma}{\rho}B_0^2\,u' \qquad (2{\cdot}8)$$

हो जाता है, जबकि परिसीमा प्रतिबन्ध

$y'=0$ के लिये $$u'=U_0'\,[a_0+\epsilon \sum_{n'=1}^{\infty} C_{n'}\, e^{\pm n't'}] \qquad (2{\cdot}9a)$$

और $y'\to\infty$ के लिये $$u'\to 0 \qquad (2{\cdot}9b)$$

है। अब हम निम्नलिखत अविमीय राशियों का समावेश करते हैं जो कि इस प्रकार परिभाषित हैं:

$$y=\frac{y'\,|\,v_0'\,|}{\nu},\quad t=\frac{v_0'^2\,t'}{4\nu},\quad n=\frac{4\nu n'}{v_0'^2},$$

$$u=\frac{u'}{U_0'} \text{ और } M=\frac{4\nu\sigma\,B_0^2}{v_0'^2\,\rho} \qquad (2{\cdot}10)$$

अतः समीकरण (2·8) का अविमीय रूप

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial u}{\partial y}-\frac{1}{4}\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{Mu}{4}=0 \qquad (2{\cdot}11)$$

हो जाता है, जहाँ परिसीमा प्रतिबन्ध

$y=0$ के लिए $$u=u_0+\epsilon\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{\pm nt} \qquad (212p)$$

और $y\to\infty$ के $$u\to 0 \qquad (2{\cdot}12b)$$

है, जहाँ

$$a_n=\frac{C_{n'}\, v_0'^2}{4\nu} \text{ है ।}$$

माना कि

$$u=f_1(y)+\epsilon\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{\pm nt} f_2(y) \tag{2·13}$$

जहाँ f_1 और f_2, y के फलन हैं जिनके मान बाद में निकाले गये हैं ।

समीकरण (2·11) में (2·13) को प्रतिस्थापित करने एवं प्रसंवादी पदों की तुलना करने पर

$$\frac{d^2f_1}{dy^2}+\frac{df_1}{dy}-\frac{M}{4}f_1=0 \tag{2·14}$$

और

$$\frac{d^2f_2}{dy^2}+\frac{df_2}{dy}-\frac{M\pm n}{4}f_2=0 \tag{2·15}$$

जबकि परिसीमा प्रतिबन्ध निम्नलिखित हैं:

$y=0$ के लिये $\quad f_1=a_0, f_2=1$ (2·16a)

$y\to\infty$ के लिये $\quad f_1=f_2=0$ (2·16b)

समीकरण (2·14) और (2·15) के हल जो प्रतिबन्ध (2·16) को संतुष्ट करते हैं, निम्नलिखित हैं:

$$f_1=a_0\, e^{-\alpha y};\, f_2=e^{-\beta y},$$

जहाँ $$\alpha=\frac{1+\sqrt{(1+M)}}{2} \text{ और } \beta=\frac{1+\sqrt{(1+M\pm n)}}{2}.$$

अतएव प्रवाह क्षेत्र निम्नलिखित समीकरण से व्यक्त होता है:

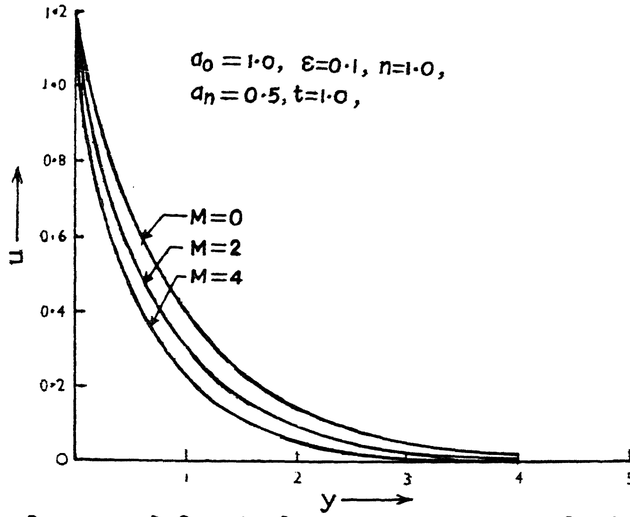
$$u(y,\, t)=a_0\, e^{-\alpha y}+\epsilon\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{\pm nt-\beta y}. \tag{2·17}$$

अवमीय उपरिस्तर घर्षण τ_0 का व्यंजक है:

$$\tau_0=\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{y=0}=-[a_0\,\alpha+\epsilon\sum_{n=1}^{\infty} a_n\, e^{\pm nt}\,\beta]. \tag{2·18}$$

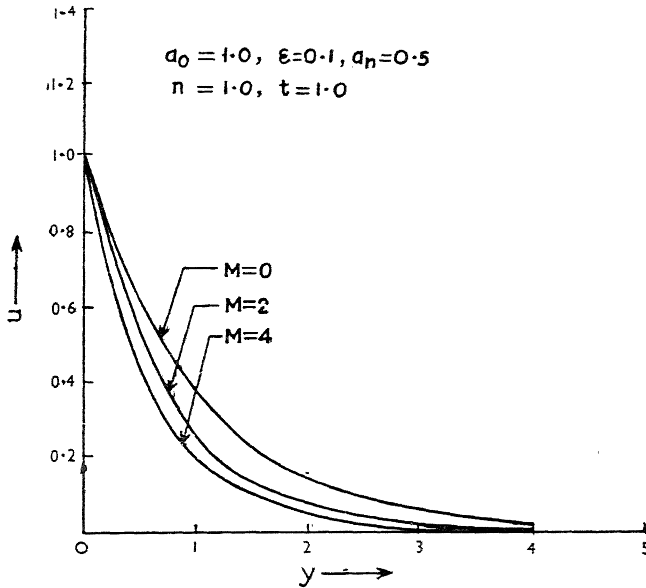
परिणाम तथा विवेचना

तरल के द्रवचुम्बकीय प्रवाह के वेग वितरण और उपरिस्तर घर्षण के व्यंजक (2·17) और (2·18) द्वारा दिये जाते हैं । **चित्र संख्या 1** में, M के विभिन्न मानों (0, 2, 4) के लिए चरघातांकत: वर्द्धमान दशा में y के समक्ष वेग वितरण के आलेखन को प्रदर्शित किया गया है । आलेखन से यह स्पष्ट है कि जैसे-जैसे y में वृद्धि होती वेग u घटता जाता है । चुम्बकीय प्राचल M का मान बढ़ने पर परिसीमास्तर की चौड़ाई घट जाती है ।



चित्र 1. y के विरुद्ध वेग वितरण u (चारधातांकीयतः वर्धमान)

चित्र संख्या 2 में चरघातांकतः ह्रासमान ((2·17) में $\pm$ में ऋणात्मक चिन्ह् लेने पर) दशा में, $M=0$, 2 और 4 के लिये y के समय वेग वितरण का आलेखन किया गया है। दोनों चित्रों की तुलना से यह स्पष्ट है कि चरघातांकिक वर्द्धमान एवं ह्रासमान दोनों दशाओं में वेग वितरण का स्वरूप एकसमान रहता है। दोनों दशाओं में ही अनुप्रस्थ चुम्बकीय क्षेत्र चूषण प्रभाव में वृद्धि करता है और परिसीमा स्तर की चौड़ाई को कम करता है। (2·17) और (2·18) में $M=0$ रखने पर किशोर तथा पाण्डे[8] के परिणाम प्राप्त हो जाते हैं।



चित्र 2. y के विरुद्ध वेग वितरण u (चरघातांकीयतः ह्रासमान)

निर्देश

1. दुबे, एस० एन०, **इन्डियन जर्न० फिजि०**, 1959, **43**, 550.

2. किशोर, एन० तथा पाण्डे, आर० डी० (**प्रकाशनाधीन**)

3. लाइटहिल, एम० जे०, **प्रेसी० रायल सोसा०**, 1954, **4234A**, 1.

4. स्टुआर्ट, जे० टी०, **प्रोसी० रायल सोसा०**, 1955, **231A**, 116.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 2, April, 1980, Pages 99-104

अर्ध अनन्त आयत में उष्मा का प्रवाह, जब उष्मास्रोत उसी के भीतर हो

के० सी० गुप्ता
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरी कालेज, जयपुर
तथा
जे० पी० एन० ओझा
गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, नाथद्वारा

[प्राप्त—दिसम्बर 17, 1977]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य एक अर्धअनन्त आयत के किसी विन्दु पर जिसके भीतर ही उष्मा स्रोत है, ताप वितरण ज्ञात करना है। विशिष्ट दशा के रूप में उष्मा स्रोत को गतिमान मान कर विचार किया गया है।

Abstract

Flow of heat in a semi infinite rectangle with a heat source within it. *By* K.C. Gupta, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur and J. P. N. Ojha, Department of Mathematics, Government College, Nathdwara.

The aim of the present paper is to investigate the distribution of the temperature at any point of a semi infinite rectangle having a heat source equal to sum of an arbitrary function and a linear function of temperature within it. Next as special case we consider a moving source of heat within it. Several other interesting sources of heat within the rectangle have also been considered which may find practical applications. The mixed Fourier transform has been used in solving the present problem. A result given by Sneddon follows as special case of one of the results obtained in this note.

1. विषय प्रवेश

प्रस्तुत प्रपत्र में हम एक अर्ध-अनन्त आयत $x \geqslant 0; 0 \leqslant y; \leqslant b$ में, जिसके भीतर उष्मा का स्रोत $U(x, y, t)+C_0\, \theta(x, y, t)$ के तुल्य है, ताप के वितरण पर विचार करेंगे (ताप को $\theta(x, y, t)$ के द्वारा या

केवल O द्वारा अंकित करेंगे। हम मानेंगे कि कोर $x=0$; $y=0$ शून्य ताप पर रखी जाती हैं जब कि कोर $y=b$ में ताप x का फलन है और प्रारम्भिक ताप वितरण x तथा y दोनों का फलन है।

तत्पश्चात्, विशिष्ट दशा के रूप में हम उष्मा के गतिमान स्रोत पर विचार करेंगे जिसकी स्थिति किसी भी क्षण t पर $x=Vt$ द्वारा और स्वयं स्रोत की उसी क्षण स्थिति $\delta(x-Vt)$ द्वारा व्यक्त की जाती है जिसमें δ डिरैक- डेल्टा फलन के लिये आया है।

उपर्युक्त दशा में आयत के किसी बिन्दु पर ताप $\theta(x, y, t)$ निम्नलिखित विख्यात आंशिक अवकल समीकरण द्वारा नियन्त्रित होता है जहाँ t समय का सूचक है।

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=K_1\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right)+U(x, y, t)+c_0\,\theta(x, y, t) \tag{1.1}$$

जहाँ $K_1=\dfrac{K}{\rho c}$ (K, आयत निर्मायिक पदार्थ की उष्मा संचालकता, ρ उसका घनत्व तथा c विशिष्ट उष्मा है, सभी को अचर मान लिया गया है)।

निर्मेय के प्रारम्भिक तथा सीमा प्रतिबन्ध निम्न प्रकार हैं

$$\theta(x, y, 0)=f(x, y);\ t=0 \tag{1.2}$$

$$\theta(0, y, t)=\theta(x, 0, t)=0 \tag{1.3}$$

$$\theta(x, b, t)=g(x) \tag{1.4}$$

$$\theta=\frac{\partial\theta}{\partial x}=0 \quad \text{ज्यों ज्यों} \quad x\to\infty \tag{1.4a}$$

इस निर्मेय के हल के लिये निम्नलिखित परिणामों की आवश्यकता होगी [स्नेडान पृ०[2] 29, 80]

$$\int_0^\infty \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}\sin(\xi x)\,dx=-\xi^2\int_0^\infty \theta(x, y)\sin(\xi x)\,dx \tag{1.5}$$

बशर्ते कि (i) $\theta=0$, जब $x=0$

(ii) $\theta=\dfrac{\partial\theta}{\partial x}=0$ जैसे जैसे $x\to\infty$

तथा

$$\int_\theta^b \frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy=\frac{n\pi}{b}\left[(-1)^{n+1}\theta(x, b)+\theta(x, 0)\right]$$
$$-\frac{n^2\pi^2}{b^2}\int_0^b \theta(x, y)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy \tag{1.6}$$

इसे बाद सर्वत्र यह मान लिया जावेगा कि समस्त अनन्त श्रेणियाँ, समाकल परम अभिसारी हैं एवं समाकलन के क्रमों में लाये गये परिवर्तन वैध हैं।

2. हल

अवकल समीकरण (1.1) को (1.2) से (1.4) तक के द्वारा दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत हल करने के लिये हम मिश्रित रूपान्तर का प्रयोग करेंगे जिसे

$$\bar{\theta}(\xi, n, t)= \int_0^\infty \int_0^b \theta(x, y, t) \sin (\xi x) \sin \left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx\, dy \tag{2.1}$$

द्वारा परिभाषित करते हैं।

(1.1) के दोनों पक्षों को $\sin (\xi x) \sin \left(\frac{n\pi y}{b}\right)$ से गुणा करने और समग्र आयत पर x तथा y के प्रति समाकलित करने पर

$$\int_0^\infty \int_0^b \frac{\partial\theta}{\partial t} \sin (\xi x) \sin \left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx\, dy=$$

$$=K_1 \int_0^\infty \int_0^b \left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}\right) \sin (\xi x) \sin \left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx\, dy$$

$$+\int_0^\infty \int_0^b \psi(x, y, t) \sin (\xi x) \left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx\, dy$$

$$+c_0 \int_0^\infty \int_0^b \theta(x, y, t) \sin (\xi x) \sin \left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx\, dy \tag{2.2}$$

(2.1), (1.3), (1.4), (1.4a), (1.5) तथा (1.6) को व्यवहृत करने पर (2.2) द्वारा व्यक्त परिणाम थोड़े से सरलीकरण के अनन्तर निम्नलिखित रूप धारण कर लेंगे

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt}+K_1 \left[\xi^2+\frac{n^2\pi^2}{b^2}-\frac{c_0}{K_1}\right]\bar{\theta}=(-1)^{n+1}\frac{K_1 n\pi}{b} F_s(x)+\bar{\psi}(\xi, n, t) \tag{2.2a}$$

जहाँ
$$F_s(x)= \int_0^\infty g(x) \sin (\xi x)\, dx \tag{2.3}$$

तथा

$$\bar{\psi}(\xi, n, t)= \int_0^\infty \int_0^b \psi(x, y, t) \sin (\xi x) \sin \left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx\, dy \tag{2.4}$$

(2.2a) एक रैखिक अवकल समीकरण है जिसका हल सीमा प्रतिवन्ध (1.2) को प्रयुक्त करने पर (2.5) द्वारा दिया जाता है।

$$\bar{\theta}(\xi, n,t)=\bar{x}(\xi, n)e^{-K_1B_1t}+(-1)^{n+1}\frac{n\pi}{b}\,\frac{F_s(x)}{B_1}\,(1-e^{-K_1B_1t})$$

$$+\int_0^t \bar{\Psi}(\xi, n, t)\, e^{-K_1 B_1 (t-\tau)}\, d\tau \tag{2.5}$$

जहाँ

$$\overline{X}(\xi, n)=\int_0^\infty \int_0^b f(x, y) \sin (\xi x) \sin \left(\frac{n\pi y}{b}\right) dx\, dy \tag{2.6}$$

तथा

$$B_1=\left[\xi^2+\frac{n^2\pi^2}{b^2}-\frac{c_0}{K}\right] \tag{2.7}$$

अचर c_0 इस प्रकार चुना जाता है कि $\beta_1>0$.

अब (2.5) में क्रमशः फूरियर साइन रूपान्तर [स्नेडान[2], पृ० 18] तथा सान्त साइन रूपान्तर [स्नेडान[2], पृ० 74] के लिये व्युत्क्रम प्रमेयों का व्यवहार करने पर हमें सीमा मान प्रमेय का निम्नलिखित हल प्राप्त होता है

$$\begin{aligned}\theta(x, y, t)=&\frac{4}{\pi b} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\int_0^\infty \overline{X}(\xi, n)\, e^{-K_1 B_1} \sin (\xi x)\, d\xi\\ &+\frac{4}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\int_0^\infty \frac{F_s(x) \sin (\xi x)\, d\xi}{B_1}\\ &+\frac{4}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\int_0^\infty \frac{e^{-K_1 B_1 t}\, F_s(x) \sin (\xi x)\, d\xi}{B_1}\\ &+\frac{4}{\pi b} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\int_0^\infty \sin (\xi x) \left[\int_0^t \bar{\Psi}(\xi, n, t)\, e^{-K_1 B_1 (t-\tau)}\, d\tau\right] d\xi\end{aligned} \tag{2.8}$$

3 विशिष्ट दशायें

(i) यदि हम (1.1) में $\psi(x, y, t)=A(y)\delta(x-Vt)$ तथा $c_0=0$ लें तो (2.8) में आया $\bar{\Psi}(\xi, n, t)$ ज्ञात परिणाम [स्नेडान[2], पृ० 33 77f] के बल पर $\bar{\phi}_s(n) \sin (\xi\, v\tau)$ निकलता है। इस प्रकार परिवर्द्धित सीमा मान निर्मेय का हल निम्नलिखित होगा।

$$\begin{aligned}\theta(x, y, t)=&\frac{4}{\pi b} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\int_0^\infty \overline{X}(\xi, n)\, e^{-K_1 B t} \sin (\xi, x)\, d\xi,\\ &+\frac{4}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n+1} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\int_0^\infty \frac{F_s(x) \sin (\xi x)\, d\xi}{B}\\ &+\frac{4}{b^2} \sum_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n} \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\int_0^\infty \frac{e^{-K_1 B t}\, F_s(x) \sin (\xi x)\, d\xi}{B}\end{aligned}$$

$$+\frac{4}{\pi b}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\times$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{\phi_s(n)\{K_1B\sin(\xi Vt)-\xi V\cos(\xi Vt)+\xi V\,e^{-K_1Bt}\}\sin(\xi x)\,d\xi}{(K_1^2B^2+\xi^2V^2)} \tag{3.1}$$

जहाँ
$$\phi_s(n)=\int_0^b A(y)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)dy \tag{3.2}$$

$$B=\left[\xi^2+\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right] \tag{3.3}$$

(ii) यदि हम (1.1) में $c_0=0$ तथा $\psi(x, y, t)=A\delta(x-Vt)$ (जहाँ A अचर है) लें तो (3.1) निम्न परिणाम में समानीत हो जाता है ।

$$\theta(x, y, t)=\frac{4}{\pi b}\sum_{n-1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\int_0^{\infty}\bar{X}(\xi, n)\,e^{-K_1Bt}\sin(\xi x)\,d\xi$$

$$+\frac{4}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\int_0^{\infty}\frac{F_s(x)\sin(\xi x)\,d\xi}{B}$$

$$+\frac{4}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\int_0^{\infty}\frac{e^{-K_1Bt}F_s(x)\sin(\xi x)\,d\xi}{B}$$

$$+\frac{4A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+(-1)^{n+1}}{n}\right]\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\times\int_0^{\infty}\frac{\{K_1B\sin(\xi Vt)-\xi V\cos(\xi Vt)+\xi V\,e^{-K_1Bt}\}\sin(\xi x)\,d\xi}{(K_1^2B^2+\xi^2V^2)}\,. \tag{3.4}$$

(iii) (1.1) में $c_0=0$, $\psi(x, y, t)=A\delta(x-Vt)$ तथा (1.4) में $g(x)=e^{-ax}$ लेने पर हल (2.8) ज्ञात परिणामों के कारण (एर्डेल्यी[1]) थोड़े से सरलीकरण के पश्चात् निम्नलिखित रूप धारण कर लेता है

$$\theta(x, y, t)=\frac{4}{\pi b}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\int_0^{\infty}\bar{X}(\xi, n)\,e^{-K_1Bt}\sin(\xi x)\,d\xi.$$

$$+\frac{2\pi}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)(e^{-n\pi x/b}-e^{-ax})}{\left(a^2-\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)}$$

$$+\frac{4}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\int_0^{\infty}\frac{e^{-K_1Bt}\,\xi\sin(\xi x)\,d\xi}{B(a^2+\xi^2)}$$

$$+\frac{4A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+(-1)^{n+1}}{n}\right]\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\int_0^\infty \frac{\{K_1B\sin(\xi Vt)-\xi V\cos(\xi Vt)+\xi V e^{-K_1Bt}\}\sin(\xi x)\,d\xi}{(K_1^2B^2+\xi^2V^2)} \tag{3.5}$$

(iv) जब ताप का प्रारम्भिक बंटन शून्य हो अर्थात् (3.5) में $f(x, y)=0$ तो यह निम्नलिखित परिणाम में समानीत हो जाता है ।

$$\theta(x, y, t)=\frac{2\pi}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)(e^{-n\pi x/b}-e^{-ax})}{\left(a^2-\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)}$$

$$+\frac{4}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\int_0^\infty\frac{e^{-K_1Bt}\xi\sin(\xi x)\,d\xi}{B(a^2+\xi^2)}$$

$$+\frac{4A}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1+(-1)^{n+1}}{n}\right]\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\times\int_0^\infty\frac{\{K_1B\sin(\xi Vt)-\xi V\cos(\xi Vt)+\xi V e^{-K_1Bt}\}\sin(\xi x)\,d\xi}{[K_1^2B^2+\xi^2V^2]} \tag{3.6}$$

(v) यदि हम (3.6) में $A=0$ रखें तो यह

$$\theta(x, y, t)=\frac{2\pi}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(-1)^{n+1}\sin\left(\frac{n\pi y}{n}\right)(e^{-n\pi x/b}\ e^{-ax})}{(a^2-n^2\pi^2/b^2)}$$

$$+\frac{4}{b^2}\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^n\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\int_0^\infty\frac{e^{-K_1Bt}\ \xi\sin(\xi x)\,d\xi}{B(a^2+\xi^2)} \tag{3.7}$$

में समानीत हो जाता है । जब (3.7) में $a\to 0$ तो हमें स्नेडान का परिणाम[2] (पृ० 188 (18)) प्राप्त होता है ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, भाग I, **मकग्राहिल न्यूयार्क**, 1954.

2. स्नेडान , आई० एन०, Fourier Transform. **मकग्राहिल न्यूयार्क**, 1951.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 2, April, 1980, Pages 105-109

लागेर श्रेणी की परम संकलनीयता

बी० के० ब्यौहार तथा डी० एस० सिन्धी
माधव विज्ञान महाविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त—मई 17, 1979]

सारांश

प्रस्तुत शोध पत्र में $x=0$ पर $-1<\alpha<\frac{1}{2}$ के लिये लागेर श्रेणी की $|C, 1|$ संकलनीयता पर एक प्रमेय सिद्ध की गई है जो हाल ही में सिंह[2] द्वारा सिद्ध प्रमेय से व्यापक शर्तों पर सिद्ध होती है।

Abstract

Absolute Cesàro summability of Laguerre series. *By* B. K. Beohar and D. S. Sindhi, Madhav Vigyan Mahavidyalaya, Ujjain.

In this paper a theorem on $|C, 1|$ summability of Laguerre series at $x=0$ for $-1<\alpha<\frac{1}{2}$ is proved under weaker conditions than those of Singh[2].

1. माना कि $\Sigma\, an$ एक अनन्त श्रेणी है जिसके आंशिक योगों के अनुक्रम $\{s_n\}$ के कोटि एक का n-वां चिज़ारो मध्यमान σ_n है। श्रेणी $\Sigma\, an$ परम संकलनीय कहलायेगी, यदि

$$\sum_n |\sigma_n-\sigma_{n-1}|<\infty \tag{1.1}$$

माना कि T_n द्वारा अनुक्रम $\{n\, an\}$ का कोटि एक का n-वां चिज़ारो मध्यमान व्यक्त होता है तो

$$n(\sigma_n-\sigma_{n-1})=T_n$$

अत: श्रेणी $\Sigma\, an$ के परम संकलनीय होने की आवश्यक शर्त है, कि

$$\Sigma\, \frac{|T_n|}{n}<\infty \tag{1.2}$$

2. माना कि $f(x) \in L(0, \infty)$, तब $f(x)$ से संबंधित लागेर श्रेणी निम्नलिखित है।

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(x) \tag{2.1}$$

जहाँ

$$a_n = \left\{ \Gamma(\alpha+1) \binom{n+\alpha}{n} \right\}^{-1} \int_0^{\infty} e^{-y} f(y)\, L_n^{(\alpha)}(y)\, dy \tag{2.2}$$

और

$$L_n^{(\alpha)}(x),\ \alpha > -1,\ n\text{-वाँ लागेर बहुपद है।}$$

3. 1970 में गुप्ता[1] ने श्रेणी (2.1) की $x=0$ तथा $\alpha=0$ पर $|C, 1|$ संकलनीयता पर एक प्रमेय सिद्ध किया ; हाल ही में सिंह[2] ने इसी श्रेणी के लिए $x=0$ पर ही परन्तु $-1<\alpha<\frac{1}{2}$ के लिए निम्न प्रमेय सिद्ध किया।

प्रमेय

$-1<\alpha<\frac{1}{2}$ एवं $0<\mu\leqslant\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha$ के लिए श्रेणी (2.1) बिन्दु $x=0$ पर $|C; 1|$ संकलनीय होगी यदि $f(x)$ सीमित अन्तराल $[0, b]$ में परिसीमित विचरण वाला हो

$$\int_0^{\infty} \frac{|d\, f(y)|}{y^{\mu}} < \infty \tag{3.1}$$

और

$$\int_0^{\infty} e^{-y/2}\, y^{\alpha/2-1/12}\, |d\, f(y)| < \infty \tag{3.2}$$

प्रस्तुत शोधपत्र का उद्देश्य (3.1) और (3.2) से व्यापक परिकल्पनाओं पर $x=0$ तथा $-1<\alpha<\frac{1}{2}$ के लिए $|C, 1|$ संकलनीयता पर एक प्रमेय सिद्ध करना है। हमारी प्रमेय निम्न है :

प्रमेय

$-1<\alpha<\frac{1}{2}$ एवं $0<\mu\leqslant\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\alpha$ के लिए श्रेणी (2.1) बिन्दु $x=0$ पर $|C, 1|$ संकलनीय होगी यदि $f(x)$ सीमित अन्तराल $[0, b]$ में परिसीमित विचरण का हो।

$$\int_t^{\delta} \frac{|d\, f(y)|}{y^{\mu}} = O\left(\log \frac{1}{t}\right),\ t \to 0, \tag{3.3}$$

$$\int_{\delta}^{n} e^{-y/2}\, y^{\alpha/2-1/4}\, |d\, f(y)| = O(\log n) \tag{3.4}$$

और

$$\int_n^{\infty} e^{-y/2}\, y^{\alpha/2-1/12}\, |d\, f(y)| = O(\log n). \tag{3.5}$$

4. प्रमेय सिद्ध करने के लिए हम लागेर बहुपद के निम्नांकित गुणों का प्रयोग करेंगे (देखिये[3] पृ० 175 एवं 238)

उपप्रमेय 1

माना कि α स्वेच्छ वास्तविक संख्या है एवं c और w नियत धनात्मक स्थिरांक हैं, तब

$$L_n^{(\alpha)}(x)=\begin{cases} x^{-\alpha/2-1/4}\, O(n^{\alpha/2-1/4}), & c/n\leqslant x\leqslant w \\ O(n^{\sigma}), & 0\leqslant x\leqslant c/n \end{cases} \tag{4.1}$$

उपप्रमेय 2

माना कि α स्वेच्छ वास्तविक है, $w>0$, $0<\eta<4$

तब यदि $n\to\infty$

$$\max e^{-x/2}\, x^{\alpha/2+1/4}\, |L_n^{(\alpha)}(x)|\sim\begin{cases} n^{\alpha/2-1/4}, & w\leqslant x\leqslant(4-\eta)\eta. \\ n^{\alpha/2-1/12} & x\geqslant w \end{cases} \tag{4.2}$$

वाम पक्ष का सर्वाधिक मान साथ में दर्शाये गये अन्तराल से लिया गया है।

5. **प्रमेय की उपपत्ति**

सूत्र $\quad L_n^{(\alpha)}(0)=\binom{n+\alpha}{n}$

तथा

$$D\left[e^{-x}\, x^{\alpha-1}\, D\, L_n^{(\alpha)}(x)\right]+ne^{-x}\, x^{\alpha}\, L_n^{(\alpha)}(x)=0$$

जहाँ $D=\dfrac{d}{dx}$, और $D\, L_n^{(\alpha)}(x)=-L_{n-\alpha}^{(\alpha+1)}(x)$

एवं स्टीलजेस समाकलन के प्रयोग से

$$\begin{aligned} an\, L_n^{(\alpha)}(0) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{\infty} e^{-y}\, y^{\alpha}\, L_n^{(\alpha)}(y)\, f(y)\, dy \\ &= \frac{1}{n\Gamma(\alpha+1)}\int_0^{\infty} D\left\{e^{-y}\, y^{\alpha+1}\, L_{n-1}^{(\alpha+1)}(x)\right\} f(y)\, dy \\ &= \frac{1}{n\Gamma(\alpha+1)}\left[e^{-y}\, y^{\alpha+1}\, L_{n-1}^{(\alpha+1)}(y)\, f(y)\right]_0^{x} - \frac{1}{n\Gamma(\alpha+1)} \\ &\qquad \int_0^{\infty} e^{-y}\, y^{\alpha+1}\, L_{n-1}^{(\alpha+1)}(y).\ d f(y) \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{n\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-y}\, y^{\alpha+1}\, L_{n-1}^{(\alpha+1)}(y)\, d f(y)$$

इसलिए

$$nan\, L_n^{(\alpha)}(0) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-y}\, y^{\alpha+1} L_{n-1}^{(\alpha+1)}(y)\, d f(y)$$

अत:

$$\sum_{\nu=1}^{m} \nu a\nu\, L_\nu^{(\alpha)}(0) = -\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-y}\, y^{\alpha+1}\, L_{n-1}^{(\alpha+2)}(y)\, d f(y).$$

अब T_n की परिभाषा से

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{|T_n|}{n} = \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{\nu=1}^{n} \nu n_\nu\, L_\nu^{(\alpha)}(0) \right|$$

$$\leqslant \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2 \Gamma(\alpha+1)} \int_0^{\infty} e^{-y}\, y^{\alpha+1} |L_{\alpha-1}^{(\alpha+2)}(y)|\, |d f(y)|$$

अब हम मानते हैं कि

$$M(n) = \int_0^{\infty} e^{-y}\, y^{\alpha+1}\, |L_{n-1}^{(\alpha+2)}(y)|\, |d f(y)| = \int_0^{c/n} + \int_{c/n}^{\delta} + \int_{\delta}^{n} + \int_n^{\infty}$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

जहाँ कि c एवं w नियत धनात्मक स्थिरांक हैं।

(4.1) और (3.3) का प्रयोग करने पर

$$I_1 = O(n^{\alpha+2}) \int_0^{c/n} y^{\alpha+1}\, |d f(y)|$$

$$= O(n) \int_0^{c/n} |d f(y)|$$

$$= O(n^{1-\mu} \log n)$$

(4.1) का प्रयोग करने पर

$$I_2 = O(n^{\alpha+2/2-1/4}) \int_{c/n}^{\delta} y^{\alpha+1}\, y^{-(\alpha+2)/2-1/4}\, |d f(y)|$$

$$= O(n^{\alpha/2+3/4}) \int_{c/n}^{\delta} y^{\alpha/2-1/4+\mu} \frac{|d f(y)|}{y^{\mu}}$$

$$= O(n^{1-\mu}) \int_{c/n}^{\delta} \frac{|d f(y)|}{y^{\mu}}$$

$$= O(n^{1-\mu} \log n)$$

(4.2) एवं (3.4) से हम पाते हैं कि,

$$I_3 = O(n^{\alpha/2+3/4}) \int_{\delta}^{n} e^{-y/2} y^{\alpha/2-1/4} |df(y)|$$

$$= O(^{\alpha/2+3/4} \log n)$$

अंत में (4.2) एवं (3.5) से

$$I_4 = O(^{\alpha+2/2-1/12}) \int_{n}^{\infty} e^{-y/2} y^{\alpha/2-1/4} |df(y)|$$

$$= O(n^{\alpha/2+11/12}) \int_{n}^{\infty} e^{-y/2} y^{\alpha/2-1/12-1/6} |df(y)|$$

$$= O(n^{\alpha/2+3/4}) \int_{n}^{\infty} e^{-y/2} y^{\alpha/2-1/12} |df(y)|$$

$$= O(n^{\sigma/2+3/4} \log n)$$

अतः हम देखते हैं कि

$$\sum_{n=1}^{m} \frac{|M(n)|}{n^2} < \infty$$

इस प्रकार प्रमेय सिद्ध होती है ।

निर्देश

1. गुप्ता, डी० पी०, **डी० एस-सी० थीसिस**, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1970.
2. सिंह, टीकम, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका,** 1979, **22**, 163-173.
3: ज़ेगो,जी०, Orthogonal Polynomials, **अमे० मैथ० सोसा० कोलोकि० पब्लि०**, 1959.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 2, April, 1980, Pages 111-115

n-चरों वाले एक सार्वीकृत फलन हेतु एक प्रसार सूत्र

बी० एल० माथुर
डिफेन्स लैबोरेटरी, रतनाडा, जोधपुर

[प्राप्त—जून 6, 1977]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र का उद्देश्य n-चरों वाले एक अत्यन्त सार्वीकृत फलन के लिये प्रसार सूत्र स्थापित करना है।

Abstract

An expansion formula for a Generalized function of n-variables. *By* B. L. Mathur, Defence Laboratory, Ratanada, Jodhpur.

The aim of the present paper is to establish an expansion formula for a most generalized function of n-variables. This function generalizes nearly all the known specical functions of n-variables, e.g., Lauricella's functions F_A, F_B, F_C, F_D and it also incorporates, as its special case, Fox's H-function[3] and H-function of two variables introduced by Munot and Kalla[7], Mourya[6], Mathur[5], Gupta and Mittal[4], Verma[10] and others, which in turn includes the G-function of two variables defined by Agarwal[1]. The results obtained are most general and various expansion formulae for other special functions occurring in physics and applied mathematics may follow as their particular case.

1. प्रस्तावना

हाल ही में सक्सेना[9] ने n-चरों वाले सार्वीकृत फलन की परिभाषा मेलिन-वार्नीज प्रकार के n-गुणित समाकल की सहायता से निम्न प्रकार से दी है:

$$H[x_1, x_2, \ldots, x_n] = H^{A, (M_n : N_n)}_{C, D, (P_n : Q_n)} \left[\begin{array}{c|c} x^1 & (\overset{*}{c}_C, \gamma_C) : (d_D, \delta_D) \\ x_2 & \\ \vdots & (n) \quad (n) \qquad (n) \quad (n) \\ x_n & (a_{P_n}, \alpha_{P_n}) : (b_{Q_n}, \beta_{Q_n}) \end{array} \right]$$

$$= \left(\frac{1}{2i\pi}\right)^n \int_{-i\infty}^{i\infty} \cdots \int_{-i\infty}^{i\infty} F(s_1+s_2+\ldots+s_n)\, \theta(s_1, s_2, \ldots, s_n)$$

$$\times x_1^{-s_1} x_2^{-s_2} \ldots x_n^{-s_n}\, ds_1\, ds_2 \ldots ds_n \qquad (1\cdot1)$$

जहाँ

$$F(S)=F(s_1+s_2+\ldots+s_n)=\frac{\prod_{j=1}^{A} \Gamma(\overset{*}{c}_j - S\gamma_j)}{\prod_{j=A+1}^{C} \Gamma(1-\overset{*}{c}_j+S\gamma_j) \prod_{j=1}^{D} \Gamma(d_j - S\delta_j)},$$

$$\theta(s_1, s_2, \ldots, s_n)=\prod_{r=1}^{n} \left\{ \frac{\prod_{j=1}^{N_r} \Gamma(1-a_j^{(r)}+s_r\, \alpha_j^{(r)}) \prod_{j=1}^{M_r} \Gamma(b_j^{(r)} - s_r\, \beta_j^{(r)})}{\prod_{j=1+N_r}^{Q_r} \Gamma(a_j^{(r)} - s_r\, \alpha_j^{(r)}) \prod_{j=1+M_r}^{P_r} \Gamma(1-b_j^{(r)}+s_r\, \beta_j^{(r)})} \right\}.$$

यहाँ $x_j \neq 0$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ तथा रिक्त गुणनफल को इकाई मान लिया गया है। साथ ही A, C, D; $M_1, \ldots, M_n$; $N_1, \ldots, N_n$; $P_1, \ldots, P_n$ तथा $Q_1, \ldots, Q_n$ पूर्णांक हैं जिनसे $0 \leqslant A \leqslant C$, $1 \leqslant M_j \leqslant Q_j$, $0 \leqslant N_j \leqslant P_j$ $(j=1, 2, \ldots, n)$ असमिकाओं की तुष्ट होती है, सभी $a_j^{(r)}$ $b_j^{(r)}$ $\overset{*}{c}_j$, तथा d_j सम्मिश्र संख्यायें हैं तथा समस्त α, β, γ तथा δ धन संख्यायें हैं। अपरंच (x_n) से n-प्राचलों का अनुक्रम $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ तथा संकेत (a_p, A_p) से p कोटिक युग्म $(a_1, A_1), \ldots, (a_p, A_p)$ के अनुक्रम का बोध होता है।

(1·1) के समाकल्य में प्राचलों का अनुक्रम ऐसा है कि कोई भी पोल संगमित नहीं होता। समाकलन के पथ की आवश्यकता हुई तो इस प्रकार दंतुरित होते हैं कि $\Gamma(\overset{*}{c}_j - S\gamma_j)$ $(j=1, 2, \ldots, A)$ तथा $\Gamma(b_j^{(r)} \;\; s_r\, \beta_j^{(r)})$ $(j=1, 2, \ldots, M_r;\ r=1, 2, \ldots, n)$ के समस्त पोल $\Gamma(1-a_j^{(r)}+s_r\, \alpha_j^{(r)})$ $(j=1, \ldots, N_r;\ r=1, \ldots, n)$ के पोलों से विलगित रहते हैं।

गामा फलन के उपगामी प्रसार से यह सुगमतापूर्वक अनुसरित होता है कि (1·1) का समाकल अभिसारी होगा यदि

$$\lambda_i < 0,\ \mu_i > 0,\ |\arg x_i| < \tfrac{1}{2}\pi\, \mu_i\ (i=1, 2, \ldots, n) \qquad (1\cdot2)$$

जहाँ
$$\lambda_i = \sum_{j=1}^{C} \gamma_j + \sum_{j=1}^{Q_i} \alpha^{(r)} - \sum_{j=1}^{D} \delta_j - \sum_{j=1}^{P_i} \beta_j^{(r)}; \qquad (1\cdot3)$$

$$\mu_i=\sum_{j=1}^{M_i}\beta_j^{(r)}-\sum_{j=1+M_i}^{P_i}\beta_j^{(r)}+\sum_{j=1}^{N_i}a_j^{(r)}-\sum_{j=1+N_i}^{Q_i}a_j^{(r)}+\sum_{j=1}^{A}\gamma_j-\sum_{j=1+A}^{C}\gamma_j-\sum_{j=1}^{D}\delta_j. \quad (1\cdot 4)$$

$A=C=D=0$, के लिये n चरों वाला सार्वीकृत फलन n H-फलनों के गुणनफल में टूट जाता है। इस प्रकार हमें तत्समक (1·5) प्राप्त होता है:

$$H^{0,\,(M_n\,:\,N_n)}_{0,\,0,\,(P_n\,:\,Q_n)}\left[\begin{matrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{matrix}\left|\begin{matrix}\text{---}:\text{---}\\ \\(r)\,(r)\quad (r)\,(r)\\(a_j,a_j):(b_j,\beta_j)\end{matrix}\right.\right]=\prod_{j=1}^{n}H^{M_j,\,N_j}_{P_j,\,Q_j}\left[x_j\left|\begin{matrix}(j)\;(j)\\(a_{Pj},a_{Pj})\\(j)\;(j)\\(b_{Qj},\beta_{Qj})\end{matrix}\right.\right]. \quad (1\cdot 5)$$

विशेषत: $n=2$ होने पर (1·1) दो चरों वाले H-फलन में समानीत हो जाता है।

आगे संकेत $\Gamma(a\pm b)$ को गुणनफल $\Gamma(a+b)\,\Gamma(a-b)$ प्रदर्शित करने के लिये प्रयुक्त किया गया है।

2. समाकल का मूल्यांकन

सर्वप्रथम हम एक समाकल का मान ज्ञात करेंगे जिसका प्रयोग हम बाद में प्रसार सूत्र

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{\lambda-1}P_w^{\mu}(x)\,H[(1-x^2)^{\delta}u_1,\ldots,(1-x^2)^{\delta}u_n]\,dx$$

$$=\pi\,2^{\mu}\,[\Gamma\{\tfrac{1}{2}(1-\mu-w)\}\,\Gamma\{\tfrac{1}{2}(2+w-u)\}]^{-1}$$

$$\times H^{A+2,\,(M_n\,:\,N_n)}_{C+2,\,D+2,\,(P_n\,:\,Q_n)}\left[\begin{matrix}u_1\\u_2\\\vdots\\u_n\end{matrix}\left|\begin{matrix}(\lambda\pm\frac{1}{2}\mu,\delta),(\overset{*}{c}_j,\gamma_j);(d_i,\delta_j),\\(\lambda-\frac{1}{2}\mu,\delta),(1+\lambda+\frac{1}{2}\mu,\delta)\\(r)\,(r)\quad(r)\,(r)\\(a_j,a_j):(b_j,\beta_j)\end{matrix}\right.\right] \quad (2\cdot 1)$$

के व्यवकलन में करेंगे जो निम्न के लिये वैध है:

$$Re[\lambda+\delta\sum_{r=1}^{n}\min b_j^{(r)}/\beta_j^{(r)}]>\frac{1}{2}\,|\,Re\,\mu\,|\;(j=1,2,\ldots,M_r),\;\delta>0,$$

$$\lambda_i<0,\;\mu_i>0,\;|\arg u_i|<\frac{1}{2}\pi\mu_i\;(i=1,2,\ldots,n).$$

उपपत्ति

n-चरों वाले सार्वीकृत फलन का मान (1·1) में से समाकल्य (2·1) में रखने और समाकलन के क्रम को विपर्यस्त करने पर जो (2.1) में कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है क्योंकि प्रक्रिया में निहित

समाकल परम अभिसारी हैं, [एर्डेल्यी इत्यादि [2] 1954 p. 316 (16)] और अन्त में (1·1) की सहायता से परिणामों की विवेचना करने पर हमें वांछित परिणाम प्राप्त होता है ।

3. प्रसार सूत्र

यहाँ जिस प्रसार सूत्र की स्थापना की जानी है वह है:

$$(1-x^2)^{\lambda-1} H[(1-x^2)^{\delta} u_1, .., (1-x^2)^{\delta} u_n]$$

$$=\pi\, 2^{\mu-1} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(2r+1)\,(r-\mu)!}{(\nu+\mu)!} P_r^{\mu}(x)\, [\Gamma\{\tfrac{1}{2}(2+r-\mu)\}\Gamma\{\tfrac{1}{2}(1-\mu-r)\}]^{-1}$$

$$\times H^{A+2,\,(M_n\,:\,N_n)}_{C+2,\,D+2,\,(P_n\,:\,Q_n)}\left[\begin{array}{c|l} u_1 & (\lambda\pm\tfrac{1}{2}\mu,\delta),(\overset{*}{c_j},\gamma_j):(d_j,\delta_j), \\ u_2 & \\ \vdots & (\lambda-\tfrac{1}{2}\mu,\delta),(\lambda+1-\tfrac{1}{2}\mu,\delta) \\ u_n & \overset{(r)\,(r)}{(a_j,\alpha_j)},:\overset{(r)\,(r)}{(b_j,\beta_j)} \end{array}\right] \qquad (3\cdot1)$$

जो (2·1) के अन्तर्गत पूर्वकथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है ।

उपपत्ति

माना

$$f(x)=(1-x^2)^{\lambda-1} H[(1-x^2)^{\delta} u_1, ..., (1-x^2)^{\delta} u_n]$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty} C_r P_r^{\mu}(x), \quad -1\leqslant x\leqslant 1, \qquad (3\cdot2)$$

समीकरण (3·2) वैध है क्योंकि $f(x)$ संतत है और विवृत अन्तराल $(-1, 1)$ में परिबद्ध विचरण वाला है। (3·2) के दोनों पक्षों में $P_w^{\mu}(x)$ से गुणा करने एवं -1 तथा 1 सीमाओं के भीतर x के प्रति समाकलित करने पर

$$\int_{-1}^{1} (1-x^2)^{\lambda-1} P_w^{\mu}(x)\, H[(1-x^2)^{\delta} u_1, ..., (1-x^2)^{\delta} u_n]\, dx$$

$$=\sum_{r=1}^{\infty} C_r \int_{-1} P_w^{\mu}(x)\, P_r^{\mu}(x)\, dx.$$

अब संबद्ध लीगेन्ड्र फलनों के लाम्बिकता गुण का उपयोग करते हुये परिणाम (2·1) से हमें C_w का मान सरलतापूर्वक प्राप्त हो जाता है । (3·2) में C_w का मान रखने पर हमें प्रसार सूत्र प्राप्त होता है ।

4. विशिष्ट दशाएँ

परिणाम (3·1) में तत्समक (1·5) को व्यवहृत करने पर हम सरलता से फाक्स के n H-फलनों के गु णनफल के लिये एक प्रसार सूत्र संबद्ध लेगेण्ड्र फलनों के पदों में प्राप्त कर सकते हैं।

विशेषत: परिणाम (2·1) तथा (3·1) में $n=2$ रखकर हम ज्ञात परिणाम व्यवहृत कर सकते हैं जिन्हें इसके पूर्व राकेश[8] ने दिया है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डिफेन्स लैबोरेटरी के निदेशक डा० सम्पूरन सिंह के प्रति कृतज्ञता प्रकट करता है जिन्होंने इस कार्य में प्रोत्साहन दिया। आवश्यक सुविधायें प्रदान करने के लिये लेखक डा० एस० कृष्ण का भी आभारी है।

निर्देश

1. अग्रवाल, आर० पी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस इंडिया**, 1965, **31A**, 536-546
2. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि Tables of Integral Transforms. **भाग II**, **मकग्राहिल**, **न्यूयार्क** 1954
3. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429
4. गुप्ता, के० सी० तथा मित्तल, पी० के०, **प्रोसी० इंडि० एके० साइंस**, **इंडिया**, 1972, **75A**, 117-123
5. माथुर, ए० बी०, **पी०-एच० डी० थीसिस**, **विक्रम यूनिवर्सिटी**, उज्जैन, 1969
6. मौर्य, डी० पी०, **पी० एच० डी० थीसिस**, **इंदौर यूनिवर्सिटी**, इन्दौर 1970
7. मुनोट, पी०-सी० तथा कल्ला, एस० एल०, Univ. Nac. Tucuman Rev, 1971 Ser. A. **21**, 67-84.
8. राकेश, एस० एल०, **मैथ० स्टुडेंट**, 1973, **41**, 442-444.
9. सक्सेना, आर० के०, Kyungpook Math. J., 1974, **14**, 255-259
10. वर्मा, आर० के०, An. Sti. Univ. Al-I-Cuza Ias.i, 1971, **17**, 103-109.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol 23. No. 2, April, 1980, Pages 117-124

अर्ध अनन्त एवं अनन्त आयताकार समांतर षटफलक में अन्तःस्थित उष्मा स्रोत की स्थिति में उष्मा प्रवाह

एस० एल० माथुर तथा जे० पी० एन० ओझा
गणित विभाग, शासकीय महाविद्यालय, नाथद्वारा

[प्राप्त—जुलाई 19, 1978]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में अर्ध अन्त आयताकार समान्तर पटफलक एवं अनन्त आयताकार समांतर षटफलक में उष्मा के प्रवाह पर, जब उष्मा का स्रोत उसके भीतर स्थित हो, विचार किया गया है।

Abstract

Flow of heat in semi-infinite and infinite rectangular parallelopiped with a heat source within it. *By* S. L. Mathur and J. P. N. Ojha, Department of Mathematics, Government College.

The present paper deals with the flow of heat in a semi infinite rectangular parallelopiped having a source of heat within it.

1. प्रस्तावना

प्रस्तुत प्रपत्र के अनुभाग A में हम एक अर्ध अनन्त आयताकार समान्तर षटफलक $0 \leqslant x \leqslant a$; $0 \leqslant y \leqslant b$; $z \geqslant 0$ में, जिसके भीतर उष्मा स्रोत स्थित है, उष्मा के प्रवाह पर विचार करेंगे जिसको $x, y\ z, t$ के याद्दच्छिक फलन तथा θ के रैखिक फलन, माना $\psi(x, y, z, t) + c_0\theta(x, y, zm\ t)$ के द्वारा व्यक्त किया जा सकता है। तत्पश्चात दो विशिष्ट प्रकार के उष्मा स्रोतों पर विचार किया जावेगा। पहला विन्दु स्रोत है विन्दु (x', y', z') पर जो $\delta(x-x')\ \delta(y\ a\ y')\ \delta(z-z')$ प्रकार का है। दूसरा गतिवान उष्मा स्रोत जिसकी किसी भी क्षण t पर स्थिति $x = Vt$ द्वारा व्यक्त की जाती है और उस क्षण स्रोत स्वयं को $M\delta(x-Vt)$ द्वारा व्यक्त किया जाता है जहाँ M एक अचर है और δ डिरैक-डेल्टा फलन के लिये आया है।

अनुभाग B में अनन्त आयताकार समान्तर षटफलक पर विचार किया गया है जिसके भीतर ही उष्मा का स्रोत स्थित है।

अनुभाग A

2. प्रमेय का सूत्रीकरण

उपर्युक्त दशा में समान्तर षटफलक के किसी भी विन्दु पर ताप $\theta(x, y, z, t)$, जहाँ t समय है, निम्नलिखित ज्ञात आंशिक अवकल समीकरण द्वारा नियन्त्रित होता है।

$$\frac{\partial\theta}{\partial t}=K_1\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)+\psi(x, y, z, t)+c_0\theta(x, y, z, t) \tag{2·1}$$

जहाँ $K_1=\frac{K}{\rho c}$ समान्तर षटफलक को निर्मित करने वाले पदार्थ की उष्मा चालकता है, ρ इसका घनत्व है और c विशिष्ट उष्मा है-सभी अचर मान लिये गये हैं।

निर्मेय के प्रारम्भिक तथा सीमा प्रतिबन्ध हैं:

$$\theta(x, y, z, 0)=f(x, y, z) \tag{2·2}$$

$$\theta(a, y, z, t)=g(y, x) \tag{2·3}$$

$$\theta(x, b, z, t)=h(x, z) \tag{2·4}$$

$$\theta(0, y, z, t)=(x, 0, z, t)=\theta(x, y, 0, t)=\theta_0 \text{ (अचर)} \tag{2·5}$$

तथा
$$\theta(x, y, z, t)\to 0 \text{ ज्यों ज्यों } Z\to\infty \tag{2·6}$$

3. हल

(2·2) से लेकर (2·6) प्रतिबन्धों के अन्तर्गत अवकल समीकरण (2·1) को सिद्ध करने के लिये हम मिश्र परिवर्त को व्यवहृत करेंगे जो

$$\theta(m, n, \xi, t)=\int_0^a\int_0^b\int_0^\infty \theta(xy, z, t)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin(\xi z)\,dx\,dy\,dz \tag{3·1}$$

द्वारा परिभाषित होता है। (2·1) के दोनों पक्षों को $\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\ y}{b}\right)\sin(\xi z)$ से गुणा करने एवं समग्र आयताकार समान्तर षटफलक में x, y, z के प्रति समाकलित करने पर

$$\int_0^a\int_0^b\int_0^\infty\frac{\partial\theta}{\partial t}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin(\xi z)\,dx\,dy\,dz$$
$$=K_1\int_0^a\int_0^b\int_0^\infty\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\right)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi v}{b}\right)\sin(\xi z)\,dx\,dy\,dz$$
$$+\int_0^a\int_0^b\int_0^\infty\psi(x, y, z, t)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin(\xi z)\,dx\,dy\,dz$$
$$+c_0\int_0^a\int_0^h\int_0^\infty\theta(x, y, z, t)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin(\xi z)\,dx\,dy\,dz \tag{3·2}$$

(3·1), (2·3), (2·4), (2·5), (2·6) तथा स्नेडान के परिचित फलों[4] का सम्प्रयोग करने पर थोड़े से सरलीकरण के पश्चात समीकरण (3·2) निम्नलिखित रूप धारण कर लेता है:

$$\frac{d\bar{\theta}}{dt}+K_1 B\bar{\theta}=K_1 [K_2\bar{F}_1 (n, \xi)+K_3\bar{F}_2(m, \xi)]+K_1A+\bar{\psi}(m, n, \xi, t) \tag{3·3}$$

जहाँ

$$\bar{F}_1(n, \xi)=\int_0^b \int_0^\infty g(y, z) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin (\xi z)\, dy\, dz, \tag{3·4}$$

$$\bar{F}_2(m, \xi)=\int_0^a \int_0^\infty h(x, z) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin (\xi z)\, dx\, dz, \tag{3·5}$$

$$K_2=(-1)^{m+1}\frac{m\pi}{a}, \tag{3·6}$$

$$K_3=(-1)^{n+1}\frac{n\pi}{b}, \tag{3·7}$$

$$A=\left[\frac{mb}{na}\{1+(-1)^{n+1}\}+\frac{na}{mb}\{1+(-1)^{m+1}\}\right]\theta_0\int_0^\infty \sin (\xi z)\, dz$$
$$-\frac{ab}{mn\pi^2}\,\theta_0\,[1+(-1)^{m+1}]\,[1+(-1)^{n+1}], \tag{3·8}$$

$$\bar{\psi}(m, n, \xi, t)=\int^a \int_0^b \int_0^\infty \psi(x, y, z, t) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin (\xi z)\, dx\, dy\, dz \tag{3·9}$$

तथा

$$B=\left[\frac{m^2x^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}+\xi^2-\frac{c_0}{K_1}\right] \tag{3·10}$$

अचर c_0 इस प्रकार चुना जाता है कि $B>0$

सीमा प्रतिवन्ध (2·2) को उपयोग में लाने पर रैखिक अवकल समीकरण (3·3) से निम्नलिखित फल प्राप्त होता है

$$\bar{\theta}(m, n, \xi, t)=\bar{x}(m, n, \xi)\, e^{-K_1Bt}+\left(\frac{1-e^{K_1Bt}}{B}\right)[K_2\bar{F}_1 (n, \xi)$$
$$+K_3\bar{F}_2 (m, \xi)]+\frac{A}{B}(1-e^{-K_1Bt})+\int_0^t \bar{\psi}(m, n, \xi, \tau)\, e^{-K_1B(t-\tau)}\, d\tau. \tag{3·11}$$

जहाँ

$$\bar{x}(m, n, \xi)=\int_0^a \int_0^b \int^\infty f(x, y, z) \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \sin (\xi z)\, dx\, dy\, dz \tag{3·12}$$

अब सान्त ज्या-परिवर्त तथा फूरियर ज्या परिवर्त[2] के लिये क्रम से उत्क्रमण प्रमेय का प्रयोग करने पर हमें सीमा मान प्रमेय के लिये निम्नलिखित हल प्राप्त होता है

$$\theta(x, y, z, t)=\frac{8}{\pi ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$[\bar{x}(m, n, \xi)\, e^{-K_1Bt}+\left(\frac{1-e^{K_1Bt}}{B}\right)\{K_2\bar{F}_1(n, \xi)+K_3\bar{F}_2(m, \xi)\}+\frac{A}{B}(1-e^{-K_1Bt})$$

$$+\int_0^t \bar{\psi}(m, n, \xi, \tau)\, e^{-K_1B(t-\tau)}\, d\tau]\sin(\xi z)\, d\xi \qquad (3\cdot13)$$

4. विशिष्ट दशायें

(i) यदि हम (2·2), (2·3), (2·4) में क्रमश $f(x, y, z)=\theta_1$ (अचर), $g(y, z)=e^{-\alpha(y+z)}$, $h(x, z)=e^{-\beta(x+z)}$ जहाँ α तथा β अचर हैं रखें और स्नेडान[2] तथा एर्डेल्यी[1] के ज्ञात फलों का उपयोग करें तो (3·13) निम्नलिखित फल में समानीत हो जाता है

$$\theta(x, y, z, t)=\frac{8\theta_1}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin(\xi z)$$

$$[1+(-1)^{m+1}][(1+(-1)^{n+1}]\, e^{-K_1Bt}\sin(\xi z)\, dz\, d\xi$$

$$+\frac{4\pi}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

$$\frac{nK_2[1+(-1)^{n+1}e^{-\alpha b}]\,[e^{-(m^2\pi^2/a^2+n^2\pi^2/b^2-c_0/K_1)^{1/2}z}-e^{-\alpha z}]}{(n^2\pi^2+\alpha^2b^2)\left(\alpha^2-\frac{m^2\pi^2}{a^2}-\frac{n^2\pi^2}{b^2}+\frac{c_0}{K_1}\right)}$$

$$-\frac{8}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

$$\frac{nK_2[1+(-1)^{n+1}e^{-\alpha b}]\, e^{-K_1Bt}\,\xi\sin(\xi z)\, d\xi}{(n^2\pi^2+\alpha^2b^2)(\alpha^2+\xi^2)\, B}.$$

$$+\frac{4\pi}{b}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

$$\frac{mK_3[1+(-1)^{n+1}e^{-\beta a}]\,[e^{-(m^2\pi^2/a^2+n^2\pi^2/b^2-c_0/K_1)}-e^{-\beta z}]}{(m^2\pi^2+\beta^2a^2)\left(\beta^2-\frac{m^2\pi^2}{a^2}-\frac{n^2\pi^2}{b^2}+\frac{c_0}{K_1}\right)}$$

$$-\frac{8}{b}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

$$\frac{mK_3[1+(-1)^{m+1}e^{-\beta a}]\,e^{-K_1Bt}\,\xi\sin(\xi z)\,d\xi}{(m^2\pi^2+\beta^2a^2)(\beta^2+\xi^2)B}$$

$$+\frac{8}{\pi ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right).$$

$$\left[\frac{A}{B}(1-e^{-K_1Bt})+\int_0^t\bar{\psi}(m,n,\xi,\tau)\,e^{-K_1B(t-\tau)}\,d\tau\right]\sin(\xi z)\,d\xi. \tag{4·1}$$

(ii) यदि हम (2·1) में $c_0 = 0$ तथा $\psi(x, y, z, t)=\delta(x-x')\,\delta(y-y')\,\delta(z-z')$ लें और यदि सीमा प्रतिबन्ध (2·2) से लेकर (2·4) तक दशा (i) की भाँति रहने दिये जायँ तो डिरैक-डेल्टा फलन तथा एर्डेल्यी के एक ज्ञात फल[1] के सम्प्रयोग से संगत सीमा मान निर्मेय का हल निम्नलिखित रोचक फल होगा:

$$\theta(x,y,z,t)=\frac{8\theta_1}{\theta^3}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\sin(\xi z)\,[1+(-1)^{m+1}]\,[1+(-1)^{n+1}]\,e^{-K_1B_1t}\sin(\xi z)\,dz\,d\xi.$$

$$+\frac{4\pi}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{nK_2(1+(-1)^{n+1}e^{-\alpha b}]\,[e^{-(m^2\pi^2/a^2+n^2\pi^2/b^2)1/2z}-e^{-\alpha z}]}{(n^2\pi^2+\alpha^3b^2)\left(\alpha^2-\frac{m^2\pi^2}{a^2}-\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)}$$

$$-\frac{8}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{nK_2[1+(-1)^{n+1}e^{-\alpha b}]\,e^{-K_1B_1t}\sin(\xi z)\,d\xi}{(n^2\pi^2+\alpha^2b^2)(\alpha^2+\xi^2)B_1}$$

$$+\frac{4\pi}{b}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{mK_3[1+(-1)^{n+1}e^{-\beta a}]\,[e^{-(m^2\pi^2/a^2+n^2\pi^2/b^2)}-e^{-\beta z}]}{(m^2\pi^2+\beta^2a^2)\left(\beta^2-\frac{m^2\pi^2}{a^2}-\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)}$$

$$-\frac{8}{b}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{mK_3[1+(-1)^{m+1}e^{-\beta a}]\,e^{-K_1B_1t}\,\xi\sin(\xi z)\,d\xi}{(m^2\pi^2+\beta^2a^2)(\beta^2+\xi^2)B_1}$$

$$+\frac{8}{\pi ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{B_1}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)(1-c^{-K_1B_1t})\sin(\xi z)\,d\xi.$$

$$+\frac{4}{ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{K_1}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi y'}{b}\right)$$

$$\frac{e^{-(m^2\pi^2/a^2+n^2\pi^2/b^2)^{1/2}z}}{\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)}\sin h\left(\frac{m^2\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)^{1/2}z'$$

$$-\frac{8}{\pi ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{K_1B_1}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{m\pi x'}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)\sin\left(\frac{n\pi y'}{b}\right)$$

$$\sin(\xi z)\sin(\xi z')\,e^{-K_1B_1t}\,d\xi.$$

(iii) यदि हम $c_0=0$ तथा $\psi(x, y, z, t)=M\delta(x-Vt)$ मानलें जहाँ M एक अचर है और (2·2) से लेकर (2·4) तक सीमा प्रतिबन्ध दशा (i) की तरह रहे आवें तो डिरैक-डेल्टा फलन (3·13) का सम्प्रयोग करने पर यह निम्नलिखित फल में समानीत हो जाता है

$$\theta(x, y, z, t)=\frac{8\theta_1}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{1}{mn}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\sin(\xi z)\,[1+(-1)^{m+1}]\,[1+(-1)^{n+1}]\,e^{-K_1B_1t}\sin(\xi z)\,dz\,d\xi.$$

$$+\frac{4\pi}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{nK_2[1+(-1)^{n+1}e^{-\alpha b}]\,[e^{-(m^2\pi^2/a^2+n^2\pi^2/b^2)^{1/2}z}-e^{-\alpha z}]}{(n^2\pi^2+\alpha^2b^2)\left(\alpha^2-\frac{m^2\pi^2}{a^2}-\frac{n^2\pi^2}{b^2}\right)}$$

$$-\frac{8}{a}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{nK_2[1+(-1)^{n+1}e^{-\alpha b}]\,e^{-K_1B_1t}\,\xi\sin(\xi z)\,d\xi}{(n^2\pi^2+\alpha^2b^2)(\alpha^2+\xi^2)B_1}$$

$$+\frac{4\pi}{b}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{mK_3[1+(-1)^{n+1}\,e^{-\beta a}]\,[e^{-(m^2\pi^2/a^2+n^2\pi^2/b^2)}-e^{-\beta z}]}{(m^2\pi^2+\beta^2a^2)-\left(\beta^2-\frac{m^2\pi^2}{a^2}-\frac{n^2\pi^2}{b}\right)}$$

$$-\frac{8}{b}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)$$

$$\frac{mK_3[1+(-1)^{m+1}\,e^{-\beta a}]\,e^{-K_1B_1t}\,\xi\sin(\xi z)\,d\xi}{(m^2\pi^2+\beta^2a^2)\,(\beta^2+\xi^2)\,B_1}.$$

$$+\frac{8}{\pi ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{A}{B_1}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)(1-e^{-K_1B_1t})\sin(\xi z)\,d\xi.$$

$$+\frac{8Ma}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\infty}\int_0^{\infty}\frac{\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)}{n(a^2K_1^2B_1^2+m^2\pi^2V^2)}$$

$$[1+(-1)^{n+1}]\left[K_1B_1\sin\left(\frac{m\pi V}{a}\right)t-\left(\frac{m\pi V}{a}\right)\cos\left(\frac{m\pi V}{a}\right)t+\left(\frac{m\pi V}{a}\right)e^{-K_1B_1t}\right]$$

$$\sin(\xi z)\sin(\xi z)\,dz\,d\xi.$$

अनुभाग B

5. अनन्त आयताकार समान्तर षटफलक

एक अनन्त आयताकार समान्तर षटफलक में, जिसके भीतर ही उष्मा स्रोत स्थित है, और सीमा प्रतिबन्ध निम्न प्रकार हैं

$$\theta(x, y, z, 0)=f(x, y, z)$$

$$\theta(a, y, z, t)=g(y, z)$$

$$\theta(x, b, z, t)=h(x, z)$$

$$\theta(0, y, z, t)=0(x, 0, z, t)=\theta_0 \text{ (अचर) और}$$

यह मान लिया गया है कि $\theta, \frac{d\theta}{dz}\to 0$ ज्यों ज्यों $|z|\to\infty$ उष्मा प्रवाह की समस्या को पिछले उदाहरण की भाँति ही हल किया जा सकता है, अन्तर इतना ही होगा कि हम (3·1) के बजाय निम्नलिखित मिश्र परिवर्त का उपयोग करते हैं:

$$\bar{\theta}(m, n, \xi, t)=\int_0^a\int_0^b\int_{-\infty}^{\infty}\theta(x, y, z, t)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)e^{i\xi z}\,dx\,dy\,dz \tag{5·1}$$

इस प्रकरण में जो हल प्राप्त होता है वह है :

$$\theta(x, y, z, t)=\frac{2}{\pi ab}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right)[\bar{X}(m, n, \xi)\, e^{-K_1B_1t}+\frac{(1-e^{-K_1Bt})}{B}$$

$$\{K_2\bar{F}_1(n, \xi)+K_3\bar{F}_2(m, \xi)\}+\frac{A}{B}(1-e^{-K_1Bt})+\int_0^t \bar{\psi}(m, n, \xi, \tau)\, e^{-K_1B(t-\tau)}\, d\tau]\, e^{i\xi z}\, d\xi.$$

जहाँ

$$\bar{F}_1(n, \xi)=\int_0^b\int_{-\infty}^{\infty} g(y, z)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i\xi z}\, dy\, dz \tag{5·3}$$

$$\bar{F}_2(m, \xi)=\int_0^a\int_{-\infty}^{\infty} h(x, z)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) e^{i\xi z}\, dx\, dz \tag{5·4}$$

$$K_2=(-1)^{m+1}\frac{m\pi}{a} \tag{5·5}$$

$$K_3=(-1)^{n+1}\frac{n\pi}{b} \tag{5·6}$$

$$A=\left[\frac{mb}{na}\{1+(-1)^{n+1}\}+\frac{na}{mb}\{1+(-1)^{m+1}\}\right]\theta_0\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi z}\, dz \tag{5·7}$$

$$B=\left[\frac{m^3\pi^2}{a^2}+\frac{n^2\pi^2}{b}+\xi^2-\frac{c_0}{K_1}\right] \tag{5·8}$$

c_0 ऐसा चुना जाता है कि $B>0$.

$$\bar{X}(m, n)=\int_0^a\int_0^b\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y, z)\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)\sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) e^{i\xi z}\, dx\, dy\, dz$$

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय डा० के० सी० गुप्ता के अभारी हैं जिन्होंने इस प्रपत्र की तैयारी में रुचि ली है ।

निर्देश

1. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, **भाग I, मैकग्राहिल न्यूयार्क**, 1954, पृष्ट 72(1), 66(25), 78(5).

2. स्नेडान, आई० एन०, Fourier Transform. **मैकग्राहिल न्यूयार्क**, 1951, पृष्ट 80, 168, 80, 18, 530.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 2, April, 1980, Pages 125-133

मृदा में प्रयुक्त लौह की उपलब्धता तथा अभिग्रहण एवं उसका मृदा के विभिन्न मैंगनीज प्रकारों पर प्रभाव

श्याम सुन्दर त्रिपाठी
कृषि रसायन विभाग, ब्रह्मानन्द महाविद्यालय, राठ (हमीरपुर)
तथा
शिवगोपाल मिश्र
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—जनवरी 1, 1979]

सारांश

बुन्देलखण्ड क्षेत्र (उ० प्र०) की मिट्टियों में फेरस सल्फेट विलयन मिलाकर देखा गया कि सभी मृदाओं में विनिमयशील लौह की मात्रा में वृद्धि होती है तथा प्रयुक्त फेरस सल्फेट की मात्रा में वृद्धि करने पर यह मात्रा और बढ़ जाती है। इन्क्यूवेशन के 30 दिन बाद फेरस लौह की मात्रा अपेक्षाकृत घट जाती है। विभिन्न मृदाओं में प्रयुक्त लौह की उपलब्धता का क्रम इस प्रकार देखा गया

मार > पडुवा > रांकड़ > काबर

अभिग्रहण क्रम इस प्रकार देखा गया,

काबर > पडुवा > रांकड़ > मार

इस प्रकार प्रयुक्त लौह का अभिग्रहण काबर मिट्टी में सबसे अधिक तथा विमुक्तीकरण मार मिट्टी में सबसे अधिक पाया गया।

फेरस सल्फेट डालने पर पडुवा तथा काबर मिट्टियों में विनिमयशील मैंगनीज में वृद्धि होती है। अपचेय मैंगनीज सभी मृदाओं में घटता है। सक्रिय मैंगनीज पडुवा मिट्टी में बढ़ता है लेकिन रांकड, मार तथा काबर मिट्टियों में घटता है।

Abstract

Availability and fixation of applied iron and its effect on various forms of soil manganese. *By* S.S. Tripathi, Department of Agricultural Chemistry, Brahmanand Degree College, Rath (Hamirpur) and S. G. Misra, Chemistry Department, Allahabad University.

Iron added as ferrous sulphate solution to various soils shows an increase in exchangeable iron in all the soils of Bundelkhand, U.P. and increased doses of added

ferrous sulphate led to a release of more Fe^{++} iron from the soils. After 30 days of incubation the amount of Fe^{++} iron decreased comparatively. The availability of applied iron in various soils follows the order

Mar > Parua > Rankar > Kabar

and the fixation is in the order of

Kabar > Parua > Rankar > Mar

Thus the fixation of applied iron is maximum in Kabar and release in Mar soils. Applied $FeSO_4$ resulted in an increase of exchangeable manganese in Parua and Kabar soils but reducible manganese decreases in all the soils. Active manganese increases in Parua soil but decreases in Rankar, Mar and Kabar soils.

लौह तथा मैंगनीज दोनों महत्वपूर्ण सूक्ष्मपोषक तत्व हैं तथा ये दोनों पारस्परिक रूप से संबंधित हैं। मृदा में एक तत्व की उपस्थिति दूसरे की उपलब्धता को भी प्रभावित करती है। मृदा में प्रयुक्त लौह की उपलब्धता, अभिग्रहण तथा उसका मृदा के विभिन्न मैंगनीज प्रकारों पर पड़ने वाले प्रभाव के सम्बन्ध में वैज्ञानिकों के मतों में एकता कम है। बोकन[1], पेज[2], सेखन तथा चोपरा[3], स्वरूप तथा मित्रा[1] का विचार है कि मृदा में फेरस सल्फेट मिलाने से विनिमयशील तथा सक्रिय मैंगनीज की मात्रा में वृद्धि होती है। कनान[5] ने बताया कि फेरस (Fe^{++}) आयरन मैंगनीज के अभिग्रहण को कम करता है। मिश्रा एवं त्रिपाठी[6] ने प्रयोगों द्वारा देखा कि मृदा में मैंगनीज सल्फेट मिलाने से फेरस लौह की मात्रा में वृद्धि होती है जो कालान्तर में घट जाती है, जब कि सोमर तथा शिव[7] ने प्रकट किया कि मृदा में इन दो में से किसी भी तत्व की अधिकता दूसरे तत्व की उपलब्धता को प्रभावित करती है।

प्रस्तुत अध्ययन हेतु उत्तर प्रदेश के बुन्देलखण्ड क्षेत्र (जिसके अन्तर्गत हमीरपुर, बांदा, झांसी, जालौन तथा ललितपुर जिले आते हैं) की मिट्टियाँ प्रयुक्त की गई हैं। इस क्षेत्र की मिट्टियां लाल-काली मिश्रित हैं। इनका स्थानीय नाम पड़ुवा, रांकड़ (लाल मिट्टियां) तथा मार, काबर (काली मिट्टियां) हैं। इन मिट्टियों में डाले गये लौह की उपलब्धता, अभिग्रहण तथा उसका मृदा के विभिन्न मैंगनीज प्रकारों पर पड़ने वाले प्रभाव का अध्ययन अभी तक नहीं किया गया है। प्रस्तुत अध्ययन इसी दृष्टिकोण से किया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अध्ययन हेतु बुन्देलखण्ड क्षेत्र की चारों प्रकार की मिट्टियों (काली तथा लाल मिट्टी समूह) के चार नमूने खेतों से इकट्ठे करके हवा में सुखा कर, पीसकर 72 मेश की छन्नी से छानकर कांच की बोतलों में संग्रहीत किये गये। इन मिट्टियों में फेरस आयरन (Fe^{++}) तथा मैंगनीज के विभिन्न प्रकारों का निर्धारण रंगमापी विधि द्वारा किया गया। प्रत्येक मिट्टी का 50 ग्राम नमूना बीकर में लिया गया। चार बीकर की मिट्टियों में जिनमें पड़ुवा, रांकड़, मार तथा काबर मिट्टियां पृथक्-पृथक् रखी थीं 25 अंश प्रति दस लक्षांश लौह आसुत जल में घुले फेरस सल्फेट के रूप में डाला गया। इसी प्रकार अन्य चारों मिट्टियों के 50-50 ग्राम नमूनों में 50 अंश दस लक्षांश लौह आसुत जल में फेरस सल्फेट विलयन के रूप में डाला गया।

सभी प्रयोग तीन समूहों में किये गये । चार बीकरों में इसी प्रकार केवल मिट्टियां ली गईं किन्तु लौह नहीं डाला गया । समय समय पर आसुत जल से मिट्टियों को नम किया गया । 15, 30 तथा 60 दिन के अन्तर से इन नमूनों में से 5-5 ग्राम मिट्टी निकाल कर जैक्सन[7] की रंगमापी विधि द्वारा मृदा में उपलब्ध फेरस लौह तथा मैंगनीज के विभिन्न प्रकारों का परिमापन किया गया । अनुपचारित तथा उपचारित फेरस सल्फेट विलयन से मूल मृदा के फेरस लौह तथा मैंगनीज के मानों में पाया गया अन्तर ही फेरस लौह या मैंगनीज के विभिन्न प्रकारों पर पड़ने वाले प्रभाव तथा लौह की उपलब्धता और अभिग्रहण को प्रकट करता है ।

परिणाम तथा विवेचना

इन्क्यूबेशन अध्ययन के लिये प्रयुक्त मृदाओं के रासायनिक गुण सारणी 1 में तथा फेरस सल्फेट का मिट्टी के विभिन्न मैंगनीज प्रकारों और फेरस लौह की उपलब्धता पर पड़ने वाले प्रभावों को सारणी 2 में दिया गया है । सारणी 3 में प्रयुक्त लौह की प्रतिशत उपलब्धता तथा अभिग्रहण एवं विनिमयशील लौह (Fe^{++}) तथा (Mn^{++}) की औसतन वृद्धि मूल मात्रा के गुणक के रूप में सारणी 4 में दी गयी है । सारणी 2 से प्रकट है कि मिट्टी में फेरस सल्फेट विलयन मिलाने से विनिमयशील फेरस लौह (Fe^{++}) की मात्रा में वृद्धि होती है । लेकिन 30 दिन बाद मात्रा अपेक्षाकृत घटने लगती है । सारणी 3 प्रदर्शित करती है कि प्रयुक्त लौह की उपलब्धता मार मिट्टी में सबसे अधिक तथा कावर मिट्टी में सबसे कम होती है । विभिन्न मृदाओं में लौह का उपलब्धता-क्रम इस प्रकार है

$$\text{मार} > \text{रांकड़} > \text{पडुवा} > \text{कावर}$$

जब कि अभिग्रहण (Fixation) क्रम इस प्रकार है

$$\text{कावर} > \text{पडुवा} > \text{रांकड़} > \text{मार}$$

इस सारणी से यह भी विदित होता है कि मार मिट्टी में में मूल रूप में उपस्थित कुल औसतन तथा मिलाये गये लौह का केवल 65 प्रतिशत लौह (Fe^{+}) ही उपलब्ध हो पाता है, शेष 34.8 प्रतिशत मृदा में स्थिर या अभिग्रहीत हो जाता है । अन्य मृदाओं में अपेक्षाकृत इससे भी कम उपलब्ध होता है या अभिग्रहीत अधिक हो जाता है । इन्क्यूबेशन अवधि के 30 दिन तक बढ़ने पर देखा गया कि पडुआ मिट्टी को छोड़ कर शेष मिट्टियों में लौह की उपलब्धता बढ़ जाती है जो पुनः 30 दिन बाद घटने लगती है । पडुआ मिट्टी का आचरण इससे ठीक विपरीत पाया गया ।

फेरस सल्फेट एक जलविलेय यौगिक है । जब इसे मृदा में मिलाया जाता है तो इससे फेरस (Fe^{++}) आयन मृदा जटिल द्वारा अधिशोषित कर लिये जाते हैं, जो उदासीन सामान्य अमोनियम ऐसीटेट विलयन द्वारा निष्कासित किये जा सकते हैं । अतः मृदा में फेरस सल्फेट मिलाने पर लौह (Fe^{++}) में वृद्धि देखी जाती है और फेरस लौह की मात्रा में कमी । यह सम्भवतः फेरस हाइड्राक्साइड ($Fe(OH)_2$) के अवक्षेपण के कारण होती है जो मृदा पी०एच० को बढ़ाता है जैसा कि डिनेट[8] तथा पोनमपेरूमा ने[9] भी व्यक्त किया है।

सारणी 1

अध्ययन में प्रयुक्त मृदाओं की रासायनिक विशेषतायें

	मिट्टियाँ	पी०-एच० मान	कार्बनिक कार्बन प्रतिशत	कैल्सियम कार्बोनेट प्रतिशत	विनमयशील Ca^{++} me/ 100g	धनायन विनिमय क्षमता me/100g	मैंगनीज के विभिन्न प्रकार अंश प्रति दस लक्षांश,				लौह (अंश प्रति दस लक्षांश)		
							जल विलेय	विनमय-शील	अपचेय	सक्रिय	विलेय	विनिमयशील	अनुपात
लाल	पड्वा	7·8	0·204	1·275	7·85	10·85	00	8	105	113	7	3	0·375
	रांकड़	7·9	0·34	0·85	11·54	11·6	00	22	162	184	7	4	0 1818
काली	मार	7·8	0·64	0.75	29·6	31·2	00	20	265	185	22	3·4	0·175
	काबर	8·1	0·904	1.655	21·5	28·75	00	20	200	220	7	4	0·20

सारणी 2

बुन्देलखण्ड की मृदाओं में लौह तथा मैंगनीज की उपलब्धता पर फेरस सल्फेट का प्रभाव

मिट्टियों में मिलाई गई फेरस सल्फेट की मात्रायें अंश प्रतिदस लक्षांश	मैंगनीज के विभिन्न प्रकार (अंश प्रति दश लक्षांश)												विनमयशील फेरस (Fe^{++}) अंश प्रति दश लक्षांश			अनुपात		
	जल विलेय			विनमयशील			अपचेय			सक्रिय								
इनक्यबेशन अवधि	15	30	60	15	30	60	15	30	60	15	30	60	15	30	60	15	30	60
पड़ुवा मिट्टी																		
अनुपचारित	0	0	0	8	8	8	105	105	105	113	113	113	3	3	3	·375	·375	·375
25 अंश लौह	18·3	0	0	18·3	30·5	12·2	9·8	111	106	134·6	141·5	118·5	18·5	17·5	22·5	1·01	·57	1·84
50 अंश फेरस	15·2	12·2	30·5	18·3	30·5	30·5	81	80	74	114·5	122·5	135	19·5	17·5	17·5	1·06	0·57	0·57
रांकड़ मिट्टी																		
अनुपचारित	0	0	0	22	22	22	162	162	162	184	184	184	4	4	4	0·181	·181	·181
25 अंश फेरस लौह	0	0	0	9·2	12·2	18·3	50	118	143	592	130·2	161·3	25	27.5	16·5	2·76	2·25	·901
50 अंश फेरस लौह	0	0	6·1	15·2	18·3	12·2	62	134	157	752	152·3	175·3	20	34	18·5	1·31	1·85	1·51
मार मिट्टी																		
अनुपचारित	0	0	0	20	20	20	265	265	265	285	285	285	35	35	35	0·175	·175	·175
25 अंश फेरस लौह	6·1	0	8	6·1	30·5	15·3	242	270	187	254·2	300·5	200·5	25·5	25	23·5	4·01	·81	1·53
50 अंश फेरस लौह	0	0	14	12·2	30·5	18·3	220	245	219	232·2	250 5	251·3	28	33	17·5	2·29	1·04	·95
काबर मिट्टी																		
अनुपचारित	0	0	0	20	20	20	200	200	200	220	220	220	4	4	4	·2	·2	·2
25 अंश फेरस लौह	0	0	9	40	35	6·1	172	186	143	211	221	158	12·5	18·5	12·5	·312	·52	2·03
50 अंश फेरस लौह	0	12·2	24	45	18·3	9·0	130	194	173·6	225	224·5	204·5	16·5	22·5	10	0·36	1·22	1·1

सारणी 3

मृदा में डाले गये लौह (फेरस सल्फेट) की प्रतिशत उपलब्धता
(सारणी 1 से उद्धृत)

मृदा की किस्म	डाली गई लौह की औसत मात्रा (अंश प्रति दस लक्षांश)	मूल मृदा में उपस्थित Fe^{++} लौह (अंश प्रति-दस लक्षांश)	15 दिन		30 दिन		60 दिन	
			विनिमयशील Fe^{++} लौह (उपलब्ध) प्रतिशत	अभिग्रहीत Fe^{++} लौह (अनुपलब्ध) प्रतिशत	विनिमयशील Fe^{++} लौह (उपलब्ध) प्रतिशत	अभिग्रहीत Fe^{++} लौह (अनुपलब्ध) प्रतिशत	विनिमयशील Fe^{++} लौह (उपलब्ध) प्रतिशत	अभिग्रहीत लौह Fe^{++} (अनुपलब्ध प्रतिशत
पडुवा	$\frac{(25+50)}{2}=37{\cdot}5$	3	46·9	53.1	43·2	56·8	49·3	50
रांकड	$\frac{(25+50)}{2}=37{\cdot}5$	4	54·2	45·8	74.09	52·91	42·17	57
मार	$\frac{(25+50)}{2}=37{\cdot}5$	3·5	65·2	34·8	70·73	29·27	50·0	50
काबर	$\frac{(25+50)}{2}=37{\cdot}5$	4	34·8	65·2	49·3	50·7	27·1	72

सारणी 4

फेरस सल्फेट मिलाने पर विनिमयशील लौह Fe^{++} तथा मैंगनीज Mn^{++} ++ की औसत वृद्धि (परिणाम मूल मान के गुणक (Multiple of original value) के रूप में प्रदर्शित)

मृदा की किस्म	विनिमयशील मैंगनीज की मात्रा में वृद्धि (मूल मृदा में उपस्थित विनिमयशील मैंगनीज के गुणक के रूप में)			औसत वृद्धि	विनिमयशील लौह Fe^{++} की मात्रा में वृद्धि (मूल मृदा में उपस्थित विनिमयशील मैंगनीज के गुणक के रूप में)			औसत वृद्धि
	15	30	60		15	30	60	
पडुवा	×2·287	×3·81	×2·666	×2·921	×6·3	×5·84	×6·67	×6.27
रांकड़	×0·554	×0·693	× ·693	×·646	×5·65	×7·5	×5·83	×6·226
मार	×0·915	×1·525	×0·84	×1·093	×7·64	×8·28	×5·85	×7·25
काबर	×2·125	×1·322	×0·377	×1·284	×3·62	×5·12	×2·87	×3·87

नोट : मूल मृदा का सम्बन्ध उस मृदा से है जिसमें फेरस सल्फेट नहीं मिलाया गया।

इस सारणी से यह भी विदित होता है कि मार मिट्टी में उपस्थित तथा कुल औसतन मिलाये गये लौह का केवल 65·2 प्रतिशत लौह का उपलब्ध हो पाता है शेष 34·8 प्रति० मृदा में स्थिर या अभिग्रहीत हो जाता है। अन्य मृदाओं में अपेक्षाकृत इससे भी कम उपलब्ध होता है, अभिग्रहीत अधिक हो जाता है। इनक्यूबेशन अवधि के 30 दिन तक बढ़ने पर देखा गया कि पडुवा मिट्टी को छोड़कर शेष मिट्टियों में लौह की उपलब्धता बढ़ जाती है। पडुवा मिट्टी का उदाहरण इससे ठीक विपरीत पाया गया।

प्रयुक्त लौह का मृदा के विभिन्न मैंगनीज प्रकारों पर पड़ने वाला प्रभाव जैसा कि सारणी 1 में अंकित है प्रदर्शित करता है कि

जल विलेय मैंगनीज अन्य मिट्टियों की अपेक्षा पडुवा मिट्टी में फेरस सल्फेट से उपचारित में अधिक बढ़ता है। 30 दिन तक रांकड़ मिट्टी में तथा 15 दिन तक काबर मिट्टी में मैंगनीज जलविलेय अवस्था में नहीं प्राप्त हो सका। केवल फेरस सल्फेट की मात्रा में वृद्धि करने पर ही जल विलेय मैंगनीज की उपस्थिति देखी गई। रांकड़ मिट्टी में यह वृद्धि सबसे कम देखी गई।

विनिमयशील मैंगनीज पडुवा तथा काबर मिट्टियों में बढ़ता है लेकिन रांकड़ मिट्टी में घटता है। प्रयुक्त फेरस सल्फेट की मात्रा में वृद्धि करने पर विनिमयशील मैंगनीज मात्रा में भी वृद्धि देखी गई। इन्क्यूबेशन अवधि के बढ़ने पर 30 दिन तक अपेक्षाकृत अधिक मैंगनीज होता है, तत्पश्चात् मात्रा घट जाती है। द्विसंयोजी मैंगनीज का विमुक्तीकरण पडुवा में अधिकतम तथा इसके बाद काबर में आता है। इसके विपरीत मार तथा रांकड मिट्टियों में मैगनीज का अभिग्रहण अपेक्षाकृत अधिक होता है।

अपचेय मैंगनीज सभी मिट्टियों में घटता है किन्तु पडुवा तथा रांकड़ मिट्टियों में 15 दिन पर घटने के बाद पुनः 30 दिन तक बढ़ता है तत्पश्चात् पुनः घटने लगता है। प्रयुक्त फेरस सल्फेट की मात्रा में वृद्धि करने पर उपचेय मैंगनीज की मात्रा पडुवा तथा मार मिट्टियों में और अधिक घटती है, जबकि रांकड़ तथा काबर मिट्टियों में वृद्धि देखी जाती है।

सक्रिय मैंगनीज 15 दिन तक केवल पडुवा मिट्टी में बढ़ता है, शेष मिट्टियों में यह घटता है; इसके बाद 30 दिन तक मार तथा काबर मिट्टी में बढ़ने के बाद पुनः घटने लगता है। फेरस सल्फेट एक अपचायक की भाँति कार्य करता है। फेरस लौह मैंगनीज के उच्च आक्साइडों का जल विलेय तथा विनिमयशील मैंगनीज के रूप में अपचयन कर देता है। फलतः जल विलेय तथा विनिमयशील मैंगनीज की मात्रा में वृद्धि तथा साथ ही अपचेय मैंगनीज मात्रा में कमी हो जाती है। इस क्रियाविधि का समर्थन बोकेन-पेज के कार्य से भी होता है जिन्होंने देखा कि मृदा में फेरस सल्फेट मिलाने से विनिमयशील तथा सक्रिय मैंगनीज की मात्रा में वृद्धि होती है। रांकड़ तथा मार मिट्टी कैल्केरियस होती हैं। संभावित है कि $CaCO_3$ मिलाये गये फेरस सल्फेट को फेरस हाइड्राक्साइड के रूप में अवक्षिप्त करके लोह को कम उपलब्ध बना देता है। यह मैंगनीज के विनिमय में बाधा पहुँचा सकता है। कैल्सियम आयन भी मैंगनीज को विनिमय स्थान में पहुँचने में बाधा पहुँचा सकते हैं इसलिए रांकड़ तथा मार मिट्टियों में विनिमयशील मैंगनीज की मात्राओं में कमी देखी है। फलत. सक्रिय मैंगनीज भी घट जाता है। पडुवा तथा काबर मिट्टियों के प्रयोगफल स्वरूप तथा मित्रा[4] के अवलोकन के अनुरूप हैं लेकिन रांकड तथा मार मिट्टियों से प्राप्त फल उसके विपरीत हैं।

मृदा में फेरस सल्फेट के प्रयोग से लौह+मैंगनीज : मैंगनीज के अनुपात में परिवर्तन लौह तथा मैंगनीज पर प्रयुक्त फेरस लौह के तुलनात्मक प्रभाव को प्रदर्शित करता है। यह लौह तथा मैंगनीज के पारस्परिक सम्बन्ध को भी प्रकट करता है। यह अनुपात सभी मृदाओं में बढ़ता है किन्तु यह वृद्धि काबर

मिट्टी में न्यूनतम तथा मार मिट्टी में अधिकतम होती है जिससे प्रकट होता कि फेरस सल्फेट से लौह का विमुक्तीकरण मैंगनीज की अपेक्षा अधिक होता है। काबर मिट्टियों में उपमुक्त लौह के विमुक्तीकरण की अपेक्षा अधिकाधिक अभिग्रहण उसकी प्रकृति के कारण होता है। कालान्तर में विनिमयशील मैंगनीज की मात्रा में वृद्धि तथा फेरस लौह की मात्रा में कमी से अनुपात में ह्रास अवश्यम्भावी है। इसी प्रकार फेरस लौह की मात्रा में वृद्धि विनिमयशील मैंगनीज की मात्रा में कमी से सम्बन्धित है। निष्कर्षत: यह कहा जा सकता है कि यदि मृदा में लौह या मैंगनीज दोनों की कमी है तो मात्र फेरस सल्फेट के मृदा में प्रयोग से ही दोनों तत्वों की उपलब्धता बढ़ाकर उनकी कमी पूरी की जा सकती है। उच्चसंयोजी अघुलनशील मैंगनीज विनिमयशील तथा उपलब्ध अवस्था में परिवर्तित हो जाता है विशेषत: पडुवा तथा काबर मृदा में। इस प्रकार मृदा में फेरस सल्फेट मात्र के प्रयोग से इन दोनों महत्वपूर्ण सूक्ष्मपोषक तत्वों की कमी को पूरा किया जा सकता है।

यदि मिश्र एवं त्रिपाठी[6] द्वारा मैंगनीज सल्फेट के लोह की उपलब्धता पर पड़ने वाले प्रभाव के अध्ययन को दृष्टिगत रखा जाय तो स्पष्ट होता है कि लौह तथा मैंगनीज दोनों एक दूसरे की उपलब्धता को बढ़ाते हैं जो कालांतर में घटने लगता है। यह भी देखा गया कि फेरस सल्फेट मिलाने पर केवल पडुवा (लाल मिट्टी) तथा काबर (काली चिकनी मिट्टी) में विनिमयशील तथा सक्रिय मैंगनीज में वृद्धि होती है जब कि रांकड़ (लाल कैल्सियमयुक्त मिट्टी) तथा मार (काली कैल्सियमयुक्त मिट्टी) में विनिमयशील, अपचेय तथा सक्रिय मैंगनीज की मात्राओं में मैंगनीज के मूल स्तर से सभी में कमी देखी जाती है। मृदा में मैंगनीज सल्फेट मिलाने पर भी विशेष रूप से मार मिट्टी में सक्रिय मैंगनीज की मात्रा में कमी देखी जाती है। स्पष्ट है कि इन मिट्टियों में लौह मैंगनीज को विस्थापित करने में असमर्थ होता है जबकि मैंगनीज सल्फेट मिलाने से उपरोक्त चारों प्रकार की मिट्टियों में फेरस लौह की मात्राओं में वृद्धि देखी जाती है (मिश्रा एवं त्रिपाठी)[6]।

निर्देश

1. बोकन, ई०, **प्लांट एन्ड स्वायल**, 1956, 237-252
2. पेज, ई०आर०, **प्लांट एन्ड स्वायल**, 1962, **17**, 96-108
3. सेखन, बी०एस० तथा चोपरा, एस०एल०, **जर्न० इन्डियन सोसा० स्वायल साइं०**, 1972, **19**(4), 403-405
4. स्वरूप, ए० तथा मित्रा, बी०, **जर्न० इन्डियन सोसा० स्वायल साइं०**, 1972, **20**(4)
5. कनान, एस०, **प्लांट फिजियो०**, 1969, **44**, 1457-1460
6. मिश्रा, एस०जी० तथा त्रिपाठी, एस०एस०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1975, **18**(4), 281-288
7. सोमर, आई०आई० तथा शिव, जे०डब्लू०, **प्लांट फिजियो०**, 1942, **17**, 582-602
8. सेनेट, जे० एच०, **मलय एग्रिक० जे०**, 1931, **20**, 518
9. पोनमपेरूमा, एफ० एन०, Chemistry of waterlogged soils, जानहापकिन्स प्रेस बाल्टीमोर, 1964

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 2, April, 1980, Pages, 135-139

लागेर श्रेणी की परम चिज़ारो संकलनीयता पर टिप्पणी

के० बी० लखानी
शासकीय अभियांत्रिक महाविद्यालय, उज्जैन

[प्राप्त– जून 1, 1979]

सारांश

प्रस्तुत टिप्पणी में अनंत अंतराल $(0, \infty)$ में शून्य विन्दु पर लागेर श्रेणी की परम चिज़ारो संकलनीयता पर एक प्रमेय सिद्ध किया गया है, जिसकी एक परिकल्पना सिंह की परिकल्पना से अधिक व्यापक है।

Abstract

A note on absolute Cesàro summability of Laguerre series. *By* K. B. Lakhani, Government Engineering College, Ujjain.

In this note, a theorem is proved on absolute Cesàro summability of Laguerre series at the point $x=0$ under much lighter assumption than that of Singh.

1. माना कि Σa_n एक अनंत श्रेणी है, जिसके आंशिक योगों के अनुक्रम $\{s_n\}$ के k-कोटि का n-वां चिज़ारो माध्यमान σ_n^k है। श्रेणी Σa_n को परम संकलनीय (C, k) या $|C, k|$-संकलनीय, $k>-1$, कहा जायेगा यदि

$$\sum_n |\sigma_n^k - \sigma_{n-1}^k|$$

अभिसारी हो।

फलन $f(x) \in L(0, \infty)$ से संबन्धित लागेर श्रेणी निम्नवत् है।

$$f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n L_n^{(\alpha)}(x), \tag{1·}$$

जहाँ कि

$$\Gamma(\alpha+1)\binom{n+\alpha}{n}a_n=\int_0^\infty e^{-x}x^\alpha L_n^{(\alpha)}(x)f(x)\,dx, \qquad (1\cdot2)$$

एवं $L_n^{(\alpha)}(x)$, $\alpha>-1$, एक लागेर बहुपद है। श्रेणी (1·1) का k-वीं कोटि का n-वां माध्य विन्दु $x=0$ पर निम्नलिखत है (देखिये, झेगो [2], पृ० 272)

$$\sigma_n^k(0)=\{A_n^k\,\Gamma(\alpha+1)\}^{-1}\int_0^\infty e^{-y}\,y^\alpha L_n^{(\alpha+k+1)}(y)f(y)\,dy \qquad (1\cdot3)$$

जहाँ कि

$$A_n^k=\binom{n+k}{k},\ A_{n-1}^k=\frac{n}{n+k}A_n^k \text{ एवं } A_n^k\sim\frac{n^k}{\Gamma(k+1)} \qquad (1\cdot4)$$

अभी हाल ही में सिंह ने ([1], पृ० 322) लागेर श्रेणी की परम चिज़ारो संकलनीयता पर निम्नांकित प्रमेय प्रतिपादित किया है:

प्रमेय

$k>\alpha+3/2$ एवं $-1<\alpha<0$ के लिए श्रेणी (1·1) विन्दु $x=0$ पर $|C, k|$-संकलनीय होगी यदि

$$\int_0^t|\phi(y)|\,dy=0(t), \qquad (1\cdot5)$$

$t\to0$, और

$$\int_1^\infty|\phi(y)|\,y^{-\alpha-7/12}\,dy<\infty, \qquad (1\cdot6)$$

जहाँ कि

$$\phi(y)=e^{-y/2}\,y^\alpha f(y). \qquad (1\cdot7)$$

2. प्रस्तुत टिप्पणी में परिकल्पना (1·5) के स्थान पर अधिक व्यापक परिकल्पना (2·1) ली गई है। इस नई परिकल्पना से हमको अधिक व्यापक फल की प्राप्ति होती है। अंत में एक अन्य साध्य प्राप्त किया गया है। हम निम्नलिखित साध्य सिद्ध करते हैं।

प्रमेय

यदि $k>\alpha+3/2$ एवं $-1<\alpha<0$, तब श्रेणी (1·1) विन्दु $x=0$ पर $|C, k|$-संकलनीय होगी, बशर्ते

$$\Phi(t)=\int_0^t|\phi(y)|\,dy=O\left(t\,\psi\left(\frac{1}{t}\right)\right), \qquad (2\cdot1)$$

$t \to 0$, और परिकल्पना (1·6) संतुष्ट होती है, जहाँ कि फलन $\psi(y) \uparrow$ जिससे कि

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\psi(n)}{n^{1-a}} < \infty \tag{2·2}$$

3. प्रमेय सिद्ध करने के लिए हम लागेर बहुपद के निम्नांकित गुणों का प्रयोग करेंगे (देखिये, झेगो [2], पृष्ठ 177 एवं 240)

उपप्रमेय 1

माना कि α स्वेच्छ वास्तविक संख्या है एवं c और ω नियत धनात्मक स्थिरांक हैं, तब यदि $n \to \infty$

$$L_n^{(\alpha)}(x) = \begin{cases} x^{-\alpha/2-1/4}\, O(n^{\alpha/2-1/4}), \frac{c}{n} \leqslant x \leqslant \omega; \\ O(n^{\alpha}), 0 \leqslant x \leqslant \frac{c}{n}. \end{cases} \tag{3·1}$$

उपप्रमेय 2

माना कि α स्वेच्छ एवं वास्तविक है, $\omega > 0, 0 < \eta < 4$, तब यदि $n \to \infty$

$$\max e^{-x/2} x^{\alpha/2+1/4} \mid L_n^{(\alpha)}(x) \mid = \begin{cases} n^{\alpha/2-1/4}, \omega \leqslant x \leqslant (4-\eta)\, n; \\ n^{\alpha/2-1/12}, x \geqslant \omega \end{cases} \tag{3·2}$$

4. **प्रमेय की उपपत्ति**

([1], पृष्ठ 323) के प्रयोग से

$$\begin{aligned} \mid \sigma_n^k(o) - \sigma_{n-1}^k(o) \mid &\leqslant \{\Gamma(\alpha+1) A_n^k\}^{-1} \int_0^{\infty} e^{-y/2} \mid \phi(y) \mid \mid L_n^{(\alpha+k)}(y) \mid dy \\ &+ \left\{\frac{n}{k} \Gamma(\alpha+1) A_n^k\right\}^{-1} \int_0^{\infty} e^{-y/2} \mid \phi(y) \mid L_{n-1}^{(\alpha+k+1)}(y) \mid dy \\ &= M(n) + N(n) \text{ (माना कि)} \end{aligned} \tag{4·1}$$

माना कि

$$\begin{aligned} M(n) &= \left\{\Gamma(\alpha+1) A_n^k\right\}^{-1} \left(\int_0^{c/n} + \int_{c/n}^1 + \int_1^n + \int_n^{\infty} \right) e^{-y/2} \mid \phi(y) \mid \mid L_n^{(\alpha+k)}(y) \mid dy \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned} \tag{4·2}$$

(3·1) एवं (2·1) के प्रयोग से

$$| I_1 | = \frac{O(n^{\alpha+k})}{A_n^k} \int_0^{c/n} e^{-y/2} \, | \phi(y) | \, dy$$

$$= O(n^{\alpha-1} \, \psi(n)), \tag{4·3}$$

पुनश्च

$$| I_2 | = O(n^{\alpha/2-k/2-1/4}) \int_{c/n}^1 y^{-\alpha/2-k/2-1/4} \, | \phi(y) | \, dy$$

$$= O(n^{\alpha/2-k/2-1/4}) \left[\left\{ y^{-\alpha/2-k/2-1/4} \, \Phi(y) \right\}_{c/n}^1 + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{k}{2} + \frac{1}{4} \right) \int_{c/n}^1 y^{-\alpha/2-k/2-5/4} \, \Phi(y) \, dy \right]$$

$$= O(n^{\alpha/2-k/2-1/4}) \left[\left\{ y^{-\alpha/2-k/2+3/4} \, \psi\left(\frac{1}{y}\right) \right\}_{c/n}^1 \right] + O(n^{\alpha/2-k/2-1/4} \, \psi(n)) \int_{c/n}^1 y^{-\alpha/2-k/2-1/4} \, dy$$

$$= O(n^{\alpha/2-k/2-1/4}) + O(n^{\alpha-1} \, \psi(n)) \tag{4·4}$$

I_3 एवं I_4 का सरलीकरण सिंह ([1], पृ० 324-325) ने किया है। पुनः माना कि

$$N(n) = \frac{k}{\Gamma(\alpha+1) n \, A_n^k} \left(\int_0^{c/n} + \int_{c/n}^1 + \int_1^n + \int_n^\infty \right) e^{-y/2} \, | \phi(y) | \, | \, L_{n-1}^{(\alpha+k+1)} (y) | \, dy$$

$$= J_1 + J_2 + J_3 + J_4. \tag{4·5}$$

(3·1) और (2·1) का प्रयोग करने पर

$$| J_1 | = \frac{O(n^{\sigma+k+1})}{n^{1+k}} \int_0^{c/n} | \phi(y) | \, dy$$

$$= O\{n^{\alpha-1} \, \psi(n)\}, \tag{4·6}$$

एवं

$$| J_2 | = O(n^{\alpha/2-k/2-3/4}) \int_{c/n}^1 | \phi(y) | \, y^{-\alpha/2-k/2-3/4} \, dy$$

$$= O(n^{\alpha/2-k/2-3/4}) \left[\left\{ y^{-\alpha/2-k/2-3/4} \, \Phi(y) \right\}_{c/n}^1 + \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{k}{2} + \frac{3}{4} \right) \int_{c/n}^1 y^{-\alpha/2-k/2-7/4} \, \Phi(y) \, dy \right]$$

$$= O(n^{\alpha/2-k/2-3/4}) + O(n^{\alpha-1} \, \psi(n)). \tag{4·7}$$

J_3 और J_4 के लिये देखिये सिंह ([1], पृ० 326)।

अत: प्रमेय सिद्ध हो जाता है।

यदि हम अपने प्रमेय में $\psi\left(\frac{1}{t}\right)$ के स्थान पर $\log \frac{1}{t}$ रखें तो निम्नलिखित प्रमेय प्राप्त हो जाता है।

प्रमेय

$k>\alpha+\frac{3}{2}$ एवं $-1<\alpha<0$ के लिए श्रेणी (1·1) विन्दु $x=0$ पर $|C, k|$-संकलनीय होगी, यदि

$$\int_0^t |\phi(y)| = O\left(t \log \frac{1}{t}\right),$$

$t \to 0$, एवं प्रतिबन्ध (1·6) का पालन होता हो।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० टीकम सिंह के अमूल्य सुझावों एवं मार्ग-दर्शन का अत्यंत आभारी है।

निर्देश

1. टीकम सिंह, **विज्ञान परिषद अनुसंधान पत्रिका**, 1978, **21**, 321-326.
2. झेगो, जी०, Orthogonal Polynomials. **अमे० मैथ० सोसा०, न्यूयार्क**, 1967.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 2, April, 1980, Pages 141-147

जीवाणु के मिश्रण में शर्करा के प्रकाशरासायनिक संश्लेषण पर टेट्रासाइक्लिन का प्रभाव

कृष्ण बहादुर, सुनील कुमार तथा उषा ज्योतिष्मती
रसायन विभाग, इलाहाबाद युनिवर्सिटी, इलाहाबाद

[प्राप्त—जनवरी 20, 1979]

सारांश

जीवाणु की प्रकाशरासायनिक विधि द्वारा उत्पत्ति हेतु लिये गये मिश्रण में टेट्रासाइक्लिन डाला गया एवं शर्करा के संश्लेषण पर टेट्रासाइक्लिन का प्रभाव देखने पर ज्ञात हुआ कि परिसर माध्यम में शर्करा के संश्लेपण में वृद्धि होती है। परन्तु इसके विपरीत मिश्रण में उपस्थित जीवाणु में डी-आक्सी रिबोस की उत्पत्ति में ह्रास होता है।

Abstract

Effect of tetracycline on the photochemical synthesis of sugar in the mixture of Jeewanu. *By* Krishna Bahadur, Sunil Kumar and Usha Jyotishmati, Chemistry Department. Allahabad University, Allahabad.

Tetracycline, in the mixture which shows the photochemical formation of Jeewanu, increases the formation of sugars in the environment medium but inhibits the formation of deoxyribose in the Jeewanu of these mixtures.

मूल कोशिका अर्थात् जीवाणु का संश्लेषण कुछ जीणाणुरहित जलीय मिश्रणों में देखा गया जिसमें अमोनियम-मालिब्डेट, डाइ अमोनियम हाइड्रोजन फास्फेट, फार्मैल्डिहाइड एवं खनिज प्रयुक्त किये गये [1]। ऐमीनो एसिड, [1,2] शर्करा, [3], न्यूक्लीक अम्ल क्षार [2], फास्फोलिपिड [4] तथा वसीय अम्लों [5] की उपस्थिति कणिकाओं में एवं परिसर माध्यम दोनों में देखी गयी।

दूसरे अन्य वैज्ञानिक शर्करा की अजीवात् जीवोत्पत्ति पर अपने विचार प्रकट कर चुके हैं। पेनम-पेरुमा [6] ने पराबैंगनी प्रकाश अथवा γ विकिरणों द्वारा (कोबाल्ट 60 स्रोत के माध्यम से) फार्मैल्डिहाइड को किरणन द्वारा प्रभावित करके रिबोस एवं डी-आक्सी रिबोस का संश्लेषण किया था। ओरो [7] ने

फार्मैल्डिहाइड अथवा ग्लिसरैल्डिहाइड और ऐसिटैल्डिहाइड के जलीय विलयन में डी-आक्सी रिबोस का संश्लेषण किया।

जीवाणु की उत्पत्ति पर एन्टिबायोटिक अथवा प्रतिजैविकों का सार्थक प्रभाव देखा जा चुका है। [8] ऐसा देखा गया है कि जीवाणु की उत्पत्ति में साथ ही साथ न्यूक्लीक एसिड क्षार की मात्रा में टेट्रासाइक्लिन की उपस्थिति में ह्रास होता है। [9]

इस प्रपत्र में जीवाणु सहित जलीय विलयनों में शर्करा के आजीवात् जीवोत्पत्ति पर टेट्रासाइक्लिन का प्रभाव देखा गया है।

प्रयोगात्मक

प्रयोग में आने वाले निम्नलिखित विलयनों को काँच द्वारा आसुत जल में बनाया गया।

1. आमोनियम मोलिब्डेट 4% (W/V) 1 आयतन 2. डाइअमोनियम हाइड्रोजन फास्फेट 3% (W/V) 2 आयतन 3. खनिज विलयन : इसको बनाने के लिए सोडियम क्लोराइड, पोटैशियम सल्फेट, कैल्सियम ऐसीटेट, मैग्नीशियम सल्फेट एवं पोटैशियम डाइहाइड्रोजन फास्फेट में से प्रत्येक के 0·02 ग्राम को 100 मिली॰ जल में घोला गया। 4. फार्मैल्डिहाइड 36%।

संश्लिष्ट मिश्रण बनाने के लिये पाँच समुच्चय (Set) बनाये गये। प्रत्येक समुच्चय का मिश्रण बनाने के लिए 250 मिली॰ धारिता वाले शंक्वाकार फ्लास्क में 30 मिली॰ 4% अमोनियम मोलिब्डेट, 60 मिली॰ 3% डाइअमोनियम हाइड्रोजन फास्फेट और 30 मिली॰ खनिज विलयन लिया गया। इन सभी फ्लास्कों का जीवाणुनाशन आटोक्लेव में 15 पौण्ड दाब पर आधे घंटे तक किया गया। जीवाणुनाशन के अनन्तर सभी फ्लास्कों में ठंडा करके 3० मिली॰ 36% फार्मैल्डिहाइड जैवविष शून्य (Aseptic) विधि द्वारा मिलाया गया।

0.5% टेट्रासाइक्लिन जैवविष शून्य विधि द्वारा निम्न प्रकार से अलग अलग समुच्चयों में मिलाया गया।

मिश्रण (i) : 0 मिली॰ टेट्रासाइक्लिन +30 मिली॰ आसुत जल

मिश्रण (ii) : 5 मिली॰ टेट्रासाइक्लिन +25 मिली॰ आसुत जल

मिश्रण (iii) : 10 मिली॰ टेट्रासाइक्लिन + 20 मिली॰ आसुत जल

मिश्रण (iv) : 20 मिली॰ टेट्रासाइक्लिन +10 मिली॰ आसुत जल

मिश्रण (v) : 30 मिली॰ टेट्रासाइक्लिन +0 मिली॰ आसुत जल

मिश्रणों को धीरे धीरे हिलाया गया और सूर्य के प्रकाश में किरणन के लिये 6 घण्टे प्रतिदिन के हिसाब से रख दिया गया। शर्करा का आकलन 3 दिन, 6 दिन एवं 10 दिन के अनन्तर पर किया गया।

यह आकलन कणिकाओं तथा परिसर माध्यम दोनों में किया गया । प्रथम समुच्च (मिश्रण i) त्रुटि नियंत्रण के लिये प्रयुक्त किया गया ।

शर्करा की पहचान द्विविम पेपर वर्णलेखी-विश्लेषण द्वारा की गयी । मानक यौगिक के तुलनात्मक अध्ययन के लिए विश्लेषण किया गया । इस प्रयोग में विभिन्न विलायकों के सम्मिश्रण से बने तीन प्रकार के मिश्रण विश्लेषण हेतु फैलने के लिए प्रयुक्त किये गये ।

फिनॉल : जल :: 80 : 20 ,

n ब्यूटेनॉल : ऐसीटिक अम्ल : जल :: 80 : 20 20 ,

n ब्यूटेनॉल : ऐसीटिक अम्ल : जल :: 4 : 1 : 5

शर्करा का अवलोकन एवं अभिव्यक्ति के लिए छिड़काव द्वारा प्रयुक्त पदार्थों में सिलवर नाइट्रेट मुख्य है । इसके लिए सिल्वर नाइट्रेट का ऐसीटोन में संतृप्त विलयन और अमोनिया प्रयुक्त किया गया । प्राप्त क्रोमेटोग्राम को सिल्वर नाइट्रेट का ऐसीटोन में संतृप्त विलयन में डुबोया गया । इसके बाद इस पेपर को हवा में 5 मिनट तक सुखा कर सूखे हुये पेपर को अमोनिया कक्ष में 10 मिनट तक रखा गया । उजले पेपर पर भूरे काले धब्बे शर्करा की उपस्थिति प्रदर्शित करते हैं। शर्करा की उपस्थिति कणिकाओं एवं परिसर माध्यम दोनों में ज्ञात हुई । इन्हें सारिणी-1 में दर्शाया गया है ।

सारणी 1

टेट्रासाइक्लिन के विभिन्न सान्द्रता वाले मिश्रणों की कणिकाओं में शर्करा का 3 दिन, 6 दिन एवं 10 वें दिन अवलोकन

टेट्रासाइक्लिन विलयन का आयतन, मिली०	अवलोकित शर्करा		
	3 दिन	6 दिन	10 दिन
0	ग्लूकोस, रिबोस	रिबोस, डीआक्सी रिबोस	रिबोस, डीआक्सी रिबोस
5	रिबोस	रिबोस, ग्लूकोस	रिबोस, डीआक्सी रिबोस
10	रिबोस	रिबोस	रिबोस, ग्लूकोस
20	रिबोस	रिबोस	रिबोस
30	रिबोस	रिबोस	रिबोस

सारणी 2

टेट्रासाइक्लिन के विभिन्न सान्द्रता वाले मिश्रणों के परिसर माध्यम में शर्करा का 3 दिन, 6 दिन तथा 10 वें दिन पर अवलोकन

0.5% टेट्रासाइक्लीन का आयतन, मिली०	अवलोकित शर्करा		
	3 दिन	6 दिन	10 दिन
0	ग्लूकोस, रिबोस, फ्रक्टोस	डी-आक्सी रिबोस, फ्रक्टोस, रिबोस,	डी-आक्सी रिबोस, रिबोस
5	रिबोस, गैलेक्टोस	डी-आक्सी रिबोस, ग्लूकोस,गैलेक्टोस	डी-आक्सी रिबोस, ग्लूकोस
10	रिबोस, ग्लूकोस	रिबोस, ग्लूकोस	रिबोस, गैलेक्टोस,
20	रिबोस	रिबोस, ग्लूकोस, फ्रक्टोस	रिबोस, ग्लूकोस, फ्रक्टोस
30	ग्लूकोस, रिबोस	ग्लूकोस, रिबोस	ग्लूकोस, रिबोस

टेट्रासाइक्लिन की विभिन्न सान्द्रता वाले परिसर माध्यम में व्युत्पन्न शर्करा का मात्रात्मक परिकलन :

प्रक्रिया :

(अ) **वर्णलेखी पृथक्करण :** वर्णलेखी पेपर पर प्रतिदर्श के 0.05 मिली० का आरोपण किया गया। पेपर को ब्यूटेनाल: ऐसीटिक अम्ल: जल के 80 : 20: 20 (*v*/*v*) में विश्लेषण हेतु फैलने के लिये प्रयुक्त किया गया। यौगिक का निवारण आसुत जल द्वारा किया गया एवं इसका आयतन 3 मिली० कर लिया गया।

(आ) **वर्णमापी आकलन :** प्रतिदर्श विलयन का 3 मिली० एक परखनली में लिया गया। 80% फिनॉल का 0·1 मिली० इसमें डाला गया। विलयन को हिलाते हुये सल्फ्यूरिक अम्ल (A· R.) का 5 मिली० धीरे धीरे डाला गया। सम्पूर्ण मिश्रण को 15 मिनट के लिये स्थिर रख दिया गया। इस मिश्रण का आयतन आसुत जल की सहायता से 15 मिली० कर लिया गया। इसके अनन्तर क्लेट समरसन वर्णमापी में वर्ण की तीव्रता मापी गयी, इसमें नीला फिल्टर का प्रयोग किया गया।

अवलोकन :

मानक विलयन : इसको बनाने के लिए 0·02 ग्रा० ग्लूकोस को 50 मिली० आसुत जल में घोला गया।

सारणी 3

मानक ग्लूकोस का मात्रात्मक आकलन

मानक ग्लूकोस का आयतन (मिली०)	प्रायुक्त आसुत जल का आयतन (मिली०)	μ
0·5	2·5	57
1·0	2·0	121
1·5	1·5	177
2·0	1·0	244
2·5	0·5	308
3·0	0·0	370

सारणी 4

टेट्रासाइक्लीन की विभिन्न सान्द्रता वाले मिश्रणों में प्रकाश-प्रभावन के तीसरे दिन व्युत्पन्न शर्करा का आकलन

टेट्रासाइक्लिन विलयन का आयतन, मिली०	μ	0·05 मिली० में संश्लिष्ट शर्करा की मात्रा (मिग्रा०)	1 मिली० में संश्लिष्ट शर्करा की मात्रा (मिग्रा०)
0	132	0·46	9·2
5	121	0·42	8·4
10	84	0·29	5·8
20	68	0·24	4·8
30	56	0·19	3·8

सारणी 5

टेट्रासाइक्लिन की विभिन्न सान्द्रता वाले मिश्रणों में प्रकाश प्रभावन के छठवें दिन व्युत्पन्न शर्करा का आकलन

टेट्रासाइक्लिन विलयन का आयतन (मिली०)	μ	0·05 मिली० में संश्लिष्ट शर्करा की मात्रा (मिग्रा०)	1 मिली० में संश्लिष्ट शर्करा की मात्रा (मिग्रा०)
0	106	0·37	7·4
5	103	0·36	7·2
10	83	0·29	5·8
20	71	0·24	4·8
30	62	0·22	4·4

सारणी 6

टेट्रासाइक्लिन की विभिन्न सान्द्रता वाले मिश्रणों में प्रकाश प्रभावन के दसवें दिन व्युत्पन्न शर्करा का आकलन

टेट्रासाइक्लिन विलयन का आयतन, मिली०	μ	0·05 मिली० में संश्लिष्ट शर्करा की मात्रा (मिग्रा०)	1 मिली० में संश्लिष्ट शर्करा की मात्रा (मिग्रा०)
0	86	0·30	6.0
5	93	0·32	6·4
10	87	0·31	6·2
20	82	0·29	5·8
30	72	0·24	4·8

परिणाम तथा विवेचना

टेट्रासाइक्लिन की सान्द्रत बढ़ाने पर परिसर माध्यम में शर्करा की मात्रा बढ़ती हुई ज्ञात होती है। ऐसा अवलोकन प्रकाश-प्रभावन के तीसरे दिन ही हो जाता है। प्रकाश-प्रभावन के छठवें दिन यह देखा गया कि 5 मिली० टेट्रासाइक्लिन सान्द्रता वाले मिश्रण में पहले की अपेक्षा शर्करा की मात्रा में ह्रास हो गया,

किन्तु दूसरे मिश्रणों के परिसर माध्यम में, जिसमें टेट्रासाइक्लिन की सान्द्रता अधिक थी, उसमें शर्करा का बनना अधिक हो गया। प्रकाश-प्रभावन के दसवें दिन 5 मिली० टेट्रासाइक्लिन सान्द्रता वाले मिश्रण में पुन: शर्करा का बनना कम हो गया एवं जिन मिश्रणों में टेट्रासाइक्लिन की मात्रा अधिक थी, उन मिश्रणों में और भी अधिक शर्करा बनने लगी।

ऐसे मिश्रणों में जिनमें टेट्रासाइक्लिन बिल्कुल नहीं था, उन मिश्रणों की कणिकाओं की तुलना में शर्करा का अवलोकन करने पर ज्ञात होता है कि मिश्रणों में टेट्रासाइक्लिन की मात्रा जैसे जैसे बढ़ती जाती है, वैसे वैसे ही शर्करा की मात्रा कणिकाओं में घटती जाती है। सभी मिश्रणों की कणिकाओं में रिबोस उपस्थित था। प्रकाश-प्रभावन का समय अधिक करने पर डी-आक्सी रिबोस भी पाया गया। यही एक ऐसी शर्करा है जो 5 मिली० टेट्रासाइक्लिन वाले मिश्रण की कणिकाओं में प्रकाश-प्रभावन के दसवें दिन देखी गयी। अन्य मिश्रणों की कणिकाओं में जिनमें टेट्रासाइक्लिन की सान्द्रता अन्यथा थी उन्हें अत्यधिक प्रकाश-प्रभावन करने पर भी डी-आक्सी रिबोस न बन सका।

उपरोक्त मिश्रणों में जहाँ कणिकाओं (जीवाणु) का प्रकाश-प्रभावन हेतु बनना टेट्रासाइक्लिन रोकता है, वहीं यही टेट्रासाइक्लिन परिसर माध्यम में बहुत सी शर्कराओं को बनाने में सहायक सिद्ध हुआ है और इन्हीं शर्कराओं की मात्रा में वृद्धि उस समय देखी गयी जब प्रकाश-प्रभावन काल में वृद्धि की गयी।

निर्देश

1. बहादुर, के० तथा रंगनायकी, एस०, **जर्न० ब्रिटिश इन्टर प्लेनेटरी सो०**, 1970, **23**, (12) 813-829

2. वर्मा, एम० एल०, **डी० फिल० थीसिस, इलाहाबाद युनिवर्सिटी** 1970.

3. रैना, वी०, **डी० फिल० थीसिस, इलाहाबाद युनिवर्सिटी** 1973

4. सिह० वाई० पी०, **डी० फिल० थीसिस, इलाहाबाद युनिवर्सिटी** 1974

5. शर्मा, के०, **डी० फिल० थीसिस, इलाहाबाद युनिवर्सिटी** 1978.

6. पेनमपेरुमा, सी० तथा मैरिनर, आर०, **रोड० रिस०** 1963, **19**, 183

7. ओरो, जे० तथा काक्स, ए० सी०, **फेड० प्रोक०**, 1962, **21**, 80

8. बहादुर, के०, रंगनायकी, एस०, सिंह, वाई पी० तथा कुमार, एस०, **रेविस्टा डी इन्स्टीट्यूटी डी० एन्टीबायोटिकॅस, रेसिफि**, 1975, **15** ($\frac{1}{2}$), 33-36

9. बहादुर, के०, कुमार, एस० तथा गुसाई, पी० एस०, **जेन्ट्र० वैक्टी०** II, 1977, **132**, 666-672

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 2, April, 1980, Pages 149-155

सड़क-निर्माण में रबड़ का उपयोग

आर० एस० शुक्ल तथा एम० सी० हरित

केन्द्रीय सड़क अनुसंधान संस्थान, नई दिल्ली

[प्राप्त—जून 30, 1979]

सारांश

वर्षों से डामर तथा तारकोल का प्रयोग सड़क-निर्माण में होता आ रहा है। इन पदार्थों का वर्गीकरण कठोरता के आधार पर किया जाता है जिसका मापदंड प्रदेश की जलवायु और विशेष रूप से ताप है। इसको ध्यान में रखते हुए भारतीय मानक संस्थान ने पाँच प्रकार के डामर 10।20, 30।40, 60।70, 80।100 और 180।200 तथा पाँच प्रकार के तारकोल RT-1, RT-2, RT-3, RT-4 और RT-5 के विनिर्देश तैयार किये हैं। किसी विशिष्ट एवं सड़क स्तर क्षेत्र के लिये डामर का चयन करते समय इस बात का ध्यान रखा जाता है कि उससे बनी सड़क पर सर्दी के दिनों में दरारें न पड़ें और गर्मी में डामर पिघल कर बहने न लगे।

भारत एक विशाल देश है, जहां गिलगिट से कन्या कुमारी तक ताप अत्यन्त विचरणशील है—यथा लेह के सर्दियों में ताप–30° से० तक; और केरल तथा अन्य समुद्रतटीय प्रदेशों में 20°से० से कम नहीं होता। फलतः जहां लेह में सर्दियों में डामर की सड़क पर दरारें पड़ने की सम्भावना रहती है वहीं केरल में गर्मी के दिनों में डामर सड़क पर बहने लगता है।

प्रयोगों द्वारा देखा गया है कि यदि डामर में 2 प्रतिशत प्राकृतिक रबड़ मिला दी जाय तो उसके गुणों में काफी परिवर्तन आ जाता है। उसका अन्तः प्रवेशन घटता है, मृदुकरण ताप बढ़ता है, उसकी श्यानता परिवर्तित हो जाती है एवं ताप का प्रभाव कम हो जाता है। कम ताप पर दरारें पड़ने की सम्भावना कम हो जाती है। प्रस्तुत प्रपत्र में रबड़ द्वारा परिवर्तित डामर के गुणों का अध्ययन किया गया है। प्रयोग के लिये केवल प्राकृतिक रबड़ का प्रयोग किया गया है।

Abstract

Use of rubber in road-constrution. *By* R.S. Shukla and M.C. Harit, Central Road Research Institute, New Delhi.

Since long the bitumen and tars are being used in road construction. The classification of these products is done on the basis of climate and especially the atmospheric temperature. Keeping this point of view in mind the Indian Standards Institution has prepared specification of five grades of bitumen i.e. 10/20, 30/40, 60/70 80/100 and 180/200 and five grades of road tars i.e. RT-1, RT-2, RT-3, RT-4 and RT-5. While selecting the binder for any pavement layer the basic consideration is that it should not crack in winter and does not flow excessively in hot summer.

India is a large country where from Gilgit to Kanyakumari different temperature conditions are encountered. Whereas in Leh the temperature drops down to —30°C in winter months, in Kerala and other coastal regions the temperature never goes below 20°C. This leads to that while the roads in Leh are more susceptible to cracking in winter, on road in Kerala bleeding normally occurs in hot summer months.

It has experimentally been observed that by addition of mere 2% rubber in bitumen its properties are modified. Its penetration is decreased and softening point is increased. Its viscosity is improved and temperature susceptibility is reduced. In this paper the improved properties of rubber/bitumen blends are studied. Only natural rubber has been used in the study.

प्राकृतिक रबड़ जिसे लैटेक्स कहते हैं रबड़ के पेड़ों से निकलने वाला एक तरल है जो देखने में दूध जैसा प्रतीत होता है। रबड़ के तने से लगभग चार इंच चौड़ा छिलका चक्रीय आकार में निकाल दिया जाता है तथा उसके निचले भाग पर एक कटोरा लगा दिया जाता है जहां तरल रबड़ इकट्ठा होती रहती है। इस रबड़ में ठोस रबड़ की मात्रा लगभग 30 प्रतिशत होती है और शेष 70% जल होता है। सड़क निर्माण में रबड़ का प्रयोग करने में यह 70 प्रतिशत जल बाधक सिद्ध होता है अतएव ठोस रबड़ की मात्रा बढ़ा कर 40-60 प्रतिशत तक ले जाते हैं। यह क्रिया दो प्रकार से सम्पन्न की जाती है :

1. **अपकेन्द्रित लेटेक्स** : इस क्रिया में लेटेक्स रबड़ को एक बर्तन में डालकर उसे तीव्र गति से घुमाते हैं जिससे ठोस रबड़ नीचे बैठ जाती है और जल ऊपर आ जाता है। जल को निथार कर उसमें अमोनिया डालकर उसे स्थिर कर दिया जाता है।

2. **वाष्पीकृत लेटेक्स** : इस क्रिया में अधिक जल को उड़ाकर पोटेसियम हाइड्राक्साइड डाल कर उसे स्थिर कर दिया जाता है।

भारत में रबड़ का उत्पादन प्रतिवर्ष लगभग 1·6 लाख टन होता है। रबड़ उद्योग की समस्त आवश्यकताओं की पूर्ति के पश्चात् लगभग 12 हजार टन रबड़ बच जाती है। निर्यात में इसका उचित मूल्य नहीं मिल पाता अतएव इसका उपयोग भली भांति सड़क-निर्माण में किया जा सकता है।

प्रयोगात्मक

रबड़/डामर मिलाने की विधि : डामर एक जलसह पदार्थ है अतएव उसमें जल की मात्रा 0·2 प्रतिशत से अधिक नहीं होनी चाहिए। यदि यह मात्रा 0·2 प्रतिशत से अधिक हो जाती है तो उसे गर्म करते समय झाग बनने लगता है और आयतन में काफी वृद्धि हो जाती है। लेटेक्स में जल की मात्रा लगभग 70 प्रतिशत होने के कारण इसे डामर में मिलाते समय सावधानी की आवश्यकता है। डामर में लेटेक्स दो प्रकार से मिलाया जाता है :

1. डामर/लेटेक्स मिश्रण : इस क्रिया में पहले डामर को टार ब्वायलर में लगभग 170° से० तक गर्म कर लेते हैं। डामर की मात्रा लगभग आधी रखी जाती है और आधा भाग झाग बनने के लिए छोड़ दिया जाता है। फिर उसमें धीरे-धीरे लेटेक्स मिलाते हैं। डामर तल पर लेटेक्स को लगभग 20 सेकेन्ड रहने देते हैं ताकि जल वाष्प बनकर उड़ जाए। इसी बीच मध्य में चलने वाली मथनी लेटेक्स को डामर के अन्दर खींच लेती है और उसे समस्त डामर में समान मात्रा में वितरित कर देती है। सम्पूर्ण लेटेक्स की मात्रा मिल जाने पर उसे तुरन्त प्रयोग में लाते हैं।

2. विरलित डामर/लेटेक्स मिश्रण : यह क्रिया डामर/लेटेक्स मिश्रण विधि से काफी सरल है। इस क्रिया में पहले 50 कि० ग्रा० डामर को 50 कि० ग्रा० मिट्टी के तेल में घोल लेते हैं, फिर लेटेक्स को उचित मात्रा लेकर उसे धीरे धीरे इस मिश्रण में मिलाते जाते हैं और मथते जाते हैं। जब पूरी मात्रा मिला लेते हैं तब मिश्रण को धीरे धीरे गर्म डामर में टार ब्वायलर में मिलाते जाते हैं और मथते जाते हैं। मिट्टी के तेल की उपस्थिति में काफी तरल रहने के कारण डामर को मिलाने में अधिक बाधा नहीं आती। पूरा मिश्रण तैयार हो जाने पर उसे प्रयोग में लाते हैं।

प्रयोगों द्वारा यह ज्ञात हुआ है कि 2-4 प्रतिशत लेटेक्स मिलाने में विशेष कठिनाई नहीं होती। परन्तु यदि इससे अधिक मात्रा लेटेक्स की मिलाई जाए तो रबड़ मथनी के चारों ओर जमा होने लगती है और उसकी गति कम कर देती है फलतः अनुकूल मिश्रण नहीं बन पाता। लेटेक्स रबड़ द्वारा डामर के परिवर्धित गुण सारणी 1 में दिये गए हैं।

विवेचना

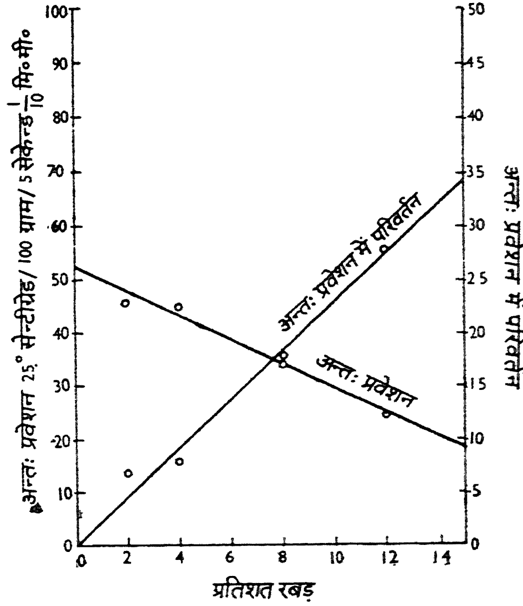
अन्तःप्रवेशन : चित्र (1) में दर्शाया गया है कि किस प्रकार रबड़ मिलाने से डामर के अन्तःकरण में परिवर्तन आता है। ज्यों-ज्यों रबड़ की मात्रा बढ़ाई जाती है त्यों-त्यों अन्तःप्रवेशन घटता जाता है। यथा अकेले डामर का अन्तः प्रवेशन जो 53 था वह 12 प्रतिशत रबड़ मिलाने पर घटकर 25 रह गया। यदि शुद्ध डामर में जिसका अन्तःप्रवेशन 35 है सड़क बनाई जाए तो उसमें सर्दियों में दरारें पड़ने की सम्भावना रहती है। परन्तु रबड़ द्वारा परिवर्धित डामर में अन्तःप्रवेशन घटने पर भी ऐसा नहीं होता। इसके अतिरिक्त अन्तःप्रवेशन कम होने पर डामर की पकड़ भी काफी अधिक होती है।

चित्र में यह भी दिखाया गया है कि किस प्रकार रबड़ की मात्रा बढ़ाने से अन्तःप्रवेशन कम होता है। प्रारम्भ में यह परिवर्तन काफी तेज होता है परन्तु जैसे-जैसे रबड़ की मात्रा अधिक होती जाती है यह

सारणी 1

पदार्थ/प्रयोग		डामर 60170	डामर 60170 4% मिट्टी तेल	डामर 60170 2% रबड़ लेटेक्स	डामर 60170 4% रबड़ लेटेक्स	डामर 60170 8% रबड़ लेटेक्स	डामर 60/70 12% रबड़ लेटेक्स	डामर 60/70+ 4% मिट्टी का तेल+ 2% रबड़ लेटेक्स	डामर 60/70+ 4% मिट्टी का तेल+ 4% रबड़ लेटेक्स	डामर 60/7 0+ 4% मिट्टी का तेल+ 8% रबड़/लेटेक्स	डामर 60/70+ 4% मिट्टी का तेल+ 12% रबड़ लेटेक्स
अन्त: प्रवेशन 1/100 से० मी०, 25° से०, 100 ग्रा०, 5 सेकेन्ड		60	180	46	45	35	25	142	111	66	40
मृदुकरण अंक 0°से०		49	40	56	65	100	107	52	60	72	95
अन्त:प्रवेशन अंक		—1·3	—0·5	0	1·8	5·8	5·8	—0·7	3·3	3·9	5·4
तन्यता, सेन्टीमीटर		+100	+100	—	0·8	2·0	1·5	—	26	10·5	8·5
श्यानता प्वायज	60° से०	1600	—	7500	6.0	—	—	3000	—	—	—
	100° से०	20	—	108	—	—	—	76	—	—	—
	135° से०	3·2	—	8·2	—	—	—	5·6	—	—	—
	163° से०	1·0	—	1·1	—	—	—	1·4	—	—	—

मात्रा कम होती जाती है। औसतन रबड़ में प्रति 1·0 प्रतिशत वृद्धि करने से अन्त:प्रवेशन में 2·5 अंक की कमी हो जाती है।



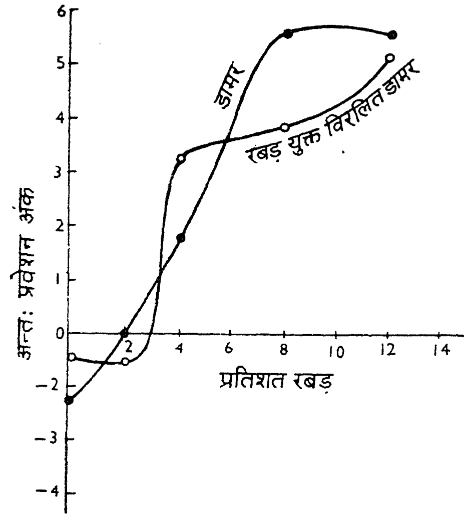
चित्र 1: 60/70 डामर के अन्त: प्रवेशन पर लेटेक्स रबड़ का प्रभाव

अन्त:प्रवेशन अंक : अन्त:प्रवेशन अंक डामर का एक ऐसा गुण है जो उसके अन्त:प्रवेशन तथा मृदु-करण के आधार पर ज्ञात किया जाता है। सड़क में प्रयोग होने वाले डामर के गुणों का विवेचन इस अंक के माध्यम से किया जा सकता है जो निम्न प्रकार है :

अन्त:प्रवेशन अंक	डामर के गुण
—2 से कम	इस प्रकार के डामर का गुण न्यूटन के सिद्धान्त पर आधारित होता है अर्थात् ज्यों ज्यों दाब बढ़ाया जाता है त्यों त्यों प्रवाह बढ़ता जाता है। ऐसा डामर कोलतार के समान होता है।
—2 से +2 तक	इस प्रकार के डामर थोड़ी प्रत्यास्थता तथा समय के साथ बढ़ने वाली कठोरता प्रदर्शित करते हैं। सड़क में प्रयोग होने वाले डामर इसी श्रेणी में आते हैं।

+2 से अधिक	इस प्रकार के डामर में प्रत्यास्थता तथा समय के साथ बढ़ने वाली कठोरता काफी प्रबल होती है । इस प्रकार के डामर प्रायः आक्सीकृत होते हैं और छतों को जलसह बनाने में प्रयुक्त किए जाते हैं ।

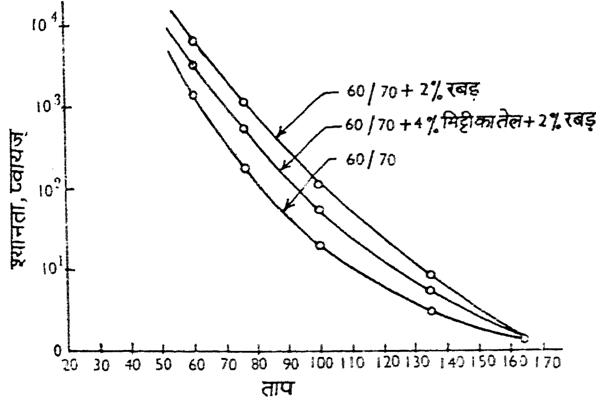
चित्र (2) में डामर के अन्तःप्रवेशन अंक का अध्ययन किया गया है । चित्र से विदित होता है कि ज्यों ज्यों रबड़ की मात्रा बढ़ाई जाती है अन्तःप्रवेशन अंक बढ़ता जाता है । 2 प्रतिशत रबड़ मिलाने से यह अंक 1·3 से घटकर 0 हो जाता है वहीं 8 प्रतिशत से आगे इसमें विशेष सुधार नहीं होता है । इससे विदित होता है कि रबड़ का लाभ केवल 8 प्रतिशत तक होता है ।



चित्र 2: अन्तःप्रवेशन अंक पर लेटेक्स रबड़ का प्रभाव

श्यानता : डामर की श्यानता सड़क-निर्माण का एक विशेष गुण है । अच्छे डामर की पहचान यह है कि ताप के साथ उसकी श्यानता में कम से कम परिवर्तन हो । किसी विशेष क्षेत्र में प्रयोग होने वाले डामर का चयन करते समय इस बात का ध्यान रखा जाता है कि वह सर्दी में जमकर वह न तो इतना कठोर हो जाए कि यातायात द्वारा उसमें दरारें पड़ने लगें और न गर्मी में उसकी श्यानता इतनी घट जाए कि वह पिघल कर बहने लगे ।

इस दिशा में रबड़ मिलाने से डामर के गुणों में काफी परिवर्तन देखा गया है । चित्र (3) में श्यानता में ताप के कारण आने वाले परिवर्तन को दर्शाया गया है । यह पाया गया है कि केवल 2 प्रतिशत रबड़ मिलाने से ही डामर की श्यानता में काफी वृद्धि हो जाती है । इसके अतिरिक्त मिट्टी का तेल जो डामर को काफी तरल बना देता है यदि उसमें भी 2 प्रतिशत रबड़ मिला दी जाए तो उसकी श्यानता भी डामर से अधिक हो जाती है ।



चित्र 3: रबड़ युक्त डामर का श्यानता/ ताप से सम्बन्ध

रबड़ द्वारा डामर के गुणों का परिवर्धन करके इस प्रकार की एक सड़क केरल में बनाई गई है जिसके परिणाम काफी उत्साहवर्धक रहे हैं। उसको देखते हुए ऐसी योजना है कि प्रत्येक क्षेत्र में और विशेषकर समुद्र तटीय प्रदेशों में तथा हिमालय के क्षेत्र में जहां ताप काफी कम हो जाता है इस प्रकार के प्रयोग किए जाएं।

निर्देश

1. "सड़क निर्माण में प्राकृतिक रबड़ का उपयोग" **इंजिनियर्स एडीशन आफ नेचुरल रबर प्रोडक्ट्स रिसर्च ऐसोसिएशन**, लंदन

2. "रोड नोट न० 36" **हर मेजेस्टी स्टेशनरी** आफिस, लंदन

3. "रिपोर्ट न० एल० आर० 370" **थाम्पसन पी० डी० एवं डब्ल्यू० एस० स्जातकोवस्की**-सड़क अनुसंधान प्रयोगशाला

4. "वार्षिक रिपोर्ट 1961-62" केन्द्रीय सड़क अनुसंधान संस्थान

5. "हाईवे रिसर्च रिकार्ड न० 273 (1939)" थाम्पसन पी० डी०

6. "रबड़ युक्त डामर द्वारा सड़क निर्माण" **केरल, सार्वजनिक निर्माण विभाग**, जून 1973

7. "रबड़ युक्त डामर के गुण" **एल० एम० स्मिथ एप्लाइड केमेस्ट्री वाल्यूम 10**, पृष्ठ 296-305, जुलाई 1960

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 2, April, 1980, Pages 157-159

टाका एस्पेरा में उपस्थित ऐमीनो अम्ल और शर्करा

के०पी० तिवारी तथा आर०डी० त्रिपाठी

रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—मई 7, 1979]

सारांश

टाका एस्पेरा के प्रटीन संघटक ग्लाइसीन, वेलाइन, ल्यूसीन, गामा ऐमीनो ब्यूटिरिक अम्ल एवं डी(-) राइबोस प्राप्त किये गये।

Abstract

Amino acid content in Tacca Aspera. *By* K.P. Tiwari and R.D. Tripathi, Chemistry Department, University of Allahabad, Allahabad.

The roots of *tacca aspera* have been found to contain D(—) ribose and also glycine, valine, leucine, γ-amino butyric acid in its protein content.

टाका एस्पेरा (हिन्दी वैराहीकन्द, प्राकृतिक गण **टैकेसी**[1]) नामक पौधा चटगाँव नामक स्थान में पाया जाता है। इस पौधे का भारत में कई औषधियों में विशेषकर कुष्टरोग[2] में प्रयोग होता रहा है। पौधे की औषधीय क्षमता को ध्यान में रखते हुए इसे रासायनिक परीक्षण हेतु चुना गया। प्रस्तुत शोधपत्र में पौधे में उपस्थित ऐमीनो अम्लों एवं शर्करा का वर्णन किया गया है।

प्रयोगात्मक तथा परिणाम

वायु में सुखायी गयी जड़ों को कूटकर बारीक चूर्ण बनाया गया। पौधे की जड़ों में उपस्थित वसीय पदार्थों को पेट्रोलियम ईथर (क्वथनांक 60-80°) के साथ साक्सलेट उपकरण द्वारा निष्कर्षित किया गया। वसारहित पौधे के चूर्ण (500 ग्रा०) को 1 लीटर जल के साथ मिलाया और भलीभाँति हिलाकर छान लिया गया। अवशेष चूर्ण (सं० 1) को 0·5 प्रतिशत सोडियम हाइड्राक्साइड के विलयन (800 मिली०) के साथ 3 घण्टे तक हिलाकर छान लिया। अवशेष चूर्ण (सं० 2) से सोडियम हाइड्राक्साइड मुक्त करने के लिए उसे पानी से भलीभाँति धोया और फिर उसे 80 प्रतिशत एथिल ऐल्कोहल के साथ 24 घंटे तक प्रतिस्यंदित करके

छान लिया। अवशेष चूर्ण (सं० 3) में नाइट्रोजन की उपस्थिति का कोई परीक्षण नहीं मिला जिससे यह ज्ञात हुआ कि पौधे में अब कोई प्रोटीन शेष नहीं है। इस प्रकार पौधे का सम्पूर्ण प्रोटीन तीनों निष्कर्ष में आ गया। अब प्रत्येक निष्कर्ष (100 मिली०) को अलग अलग $6N$ हाइड्रोक्लोरिक अम्ल (25 मिली०) के साथ 16 घंटे तक जलउष्मक पर प्रतिस्यंदित किया गया। प्रत्येक विश्लेषित भाग को पोर्सलीन प्याली में पृथक् पृथक् लिया गया एवं हाइड्रोक्लोरिक अम्ल को जलउष्मक पर आसवन रीति द्वारा विमुक्त किया गया। जल मिलाकर वाष्पन तब तक किया जब तक कि उठने वाली वाष्प अमोनिया से भीगी कांच की छड़ के साथ सफेद धुँआ न दे। प्रत्येक विश्लेषित भाग को परिशुद्ध ऐल्कोहल से निष्कर्षित किया और इस प्रकार प्राप्त दोनों ऐल्कोहलीय निष्कर्षों को एक बीकर में लेकर मिला लिया गया। इस मिश्रित निष्कर्ष में उपस्थित ऐमीनो अम्लों को अवरोहण वर्णपत्र लेखन विधि द्वारा पहचाना गया। वर्णलेखन में ब्यूटेनाल, ऐसीटिक अम्ल (1 : 5 आ०/आ०) को विलायक के रूप मे प्रयुक्त किया गया। (विलायक के मिश्रण को 24 घंटे तक साथ रखा गया था) वर्णचित्र को वायु में 24 घंटे तक सुखाया और इस पर 0·1 प्रतिशत निनहाइड्रिन के ऐसीटोन में बने विलयन का छिड़काव किया गया। अब इसे विद्युतउष्मक में 5-10 मिनट तक सुखाया गया। विभिन्न ऐमीनो अम्ल वर्णचित्र पर नीले वर्ण के धब्बों के रूप में प्रकट हो गये। इन धब्बों के R_f ज्ञात किये गये। इन R_f की तुलना प्रामाणिक ऐमीनो अम्लों के R_f [3] से की गयी और इन्हें पहचाना गया। प्राप्त ऐमीनो अम्लों के R_f सारणी 1 में दिये जा रहे हैं।

सारणी 1

ऐमीनो अम्ल, प्रामाणिक	R_f मान 30° से० पर	प्राप्त R_f मान
ग्लाइसीन	0·24	0·240
गामा ऐमीनो ब्यूटिरिक अम्ल	0·39	0·396
वेलाइन	0·53	0·540
ल्यूसीन	0·68	0·678

शर्कराओं की उपस्थिति

वसारहित पौधे के ऐल्कोहलीय निस्यंद को कम दाब पर आसवन की रीति द्वारा सान्द्रित किया। सान्द्र निस्यंद का आयतन आसवन द्वारा इतना कर लिया गया कि निस्यंद एक लसलसे पदार्थ में परिवर्तित हो गया। इस लसलसे पदार्थ को फिर से पेट्रोलियम ईथर (60-80° क्वथनांक) से धो लिया गया ताकि बचा हुआ वसीय पदार्थ निस्यंदीय लसलसे पदार्थ में न रह जाय। अब इस पदार्थ का 0·1 ग्राम लेकर 10 मिली० आसुत जल में गर्म करके घोल लिया गया। इस विलयन का 1 मिली० लेकर इसमें 1 मिली० फेहलिंग विलयन—1 और 1 मिली० फेहलिंग विलयन—2 मिलाया गया और विलयन को जलउष्मक पर 10 मिनट तक गर्म किया गया। विलयन को ठंडा करने पर बादामी लाल अवक्षेप प्राप्त हुआ जिससे पौधे में शर्करा की उपस्थिति की पुष्टि हुई।

शर्करा की पहिचान अवरोहण वर्णपत्र से की गयी जिसके लिए ब्यूटेनाल : ऐसीटिक अम्ल : जल (4 : 1 : 5) को मिलाकर विलायक के रूप में प्रयुक्त किया गया। विकसित वर्णपत्र को वायु में सुखाकर ऐनिलीन हाइड्रोजन थेलेट द्वारा छिड़का गया। अब वर्णपत्र को विद्युतउष्मक में 100° से० पर 30 मिनट तक गर्म किया गया। इससे लाल बादामी धब्बा वर्णपत्र पर प्राप्त हुआ जिसका R_f 0·31 मापा गया जिससे डी-रिबोस पाये जाने की पुष्टि हुई। एक दूसरे वर्णपत्र में डी-रिबोस का प्रामाणिक विलयन बनाकर केशिकानली से वर्णपत्र के एक तरफ लगाया गया और दूसरी तरफ पौवे के ऐल्कोहलीय निस्यंद को लगाया गया। इस वर्णपत्र को ब्यूटेनाल: ऐसीटिक अम्ल : जल (4 : 1 : 5) में डुबोकर विकसित कर लिया गया। सुखाने के पश्चात् इसे ऐनिलीन हाइड्रोजन थेलेट से छिड़का गया। छिड़के गये वर्णपत्र को विद्युतउष्मक पर गर्म किया। वर्णपत्र पर दो धब्बे प्राप्त हुये जिनके R_f लगभग एक ही थे। इससे डी-रिबोस की उपस्थिति पुष्टि हुई।

निर्देश

1. कीर्तिकर, के०आर० तथा बासु, बी०डी०, Indian Medicinal Plants-भाग 4, पृष्ठ 2476-2477, 1935
2. चोपड़ा, आर०एन०, नायर, एस०एल० तथा चोपड़ा, ।आई०सी०, Glossary of Medicinal Plants. सी०एस०आई०आर०, नई दिल्ली पृष्ठ संख्या 238-239, संस्करण 1956
3. लेडरर तथा लेडरर, The Chromatography, पृष्ठ 203, सारणी 73-ए
4. वही, वही, पृष्ठ 159-160

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23 No 2, April, 1980, Pages, 161-164

अंतरास्लीव इलेक्ट्रोड दूरी के फलन के रूप में हैलोजेनों में जोशी प्रभाव

जगदीश प्रसाद

रसायन विभाग, मेरठ कॉलिज, मेरठ

[प्राप्त—जून 16, 1979]

सारांश

स्थिर दाब p तथा नलिका के आंतरिक व्यास D पर, कांच नलिकाओं पर विभिन्न दूरी d पर लगे वाह्य स्लीव इलेक्ट्रोडों से ट्रांसफॉर्मर विसर्जन द्वारा उत्तेजित हैलोजेनों में जोशी प्रभाव $\triangle_i$ का अध्ययन किया गया। देहली विभव V_m, d के साथ लगभग एकघाततः बढ़ता है। नेट $\pm\triangle_i$ तथा आपेक्षिक जोशी प्रभाव $\pm\%\triangle_i$, d के साथ पहले अधिकतम तक बढ़कर क्रमशः घटे और बाद में स्थिर हो गये। $+\triangle_i$ अनुप्रयुक्त विभव V की वृद्धि के साथ घटा और व्युत्क्रमण विभव V_i के ऊपर इसका चिह्न $-\triangle_i$ में बदल गया। स्थिर V पर अंधकार में धारा i_D का d के साथ घटना प्रदर्शित करता है कि $V_{+\triangle i max}$, d के साथ बढ़ता और फलतः V_i का मान d के साथ बढ़ जाता है। क्योंकि d के साथ V_m बढ़ता जाता है, अतः d के साथ V_i भी बढ़ना चाहिए। प्राप्त परिणामों की व्याख्या $\triangle i$ के लिए जोशी के सिद्धान्त के आधार पर की गयी है।

Abstract

Joshi effect in halogens as a function of inter-sleeve electrode distance. *By* Jagdish Prasad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

The Joshi effect $\triangle_i$ has been studied in halogens, excited by transformer discharge, in glass tubes with external sleeve electrodes at different distances d apart, at constant gas pressure p and internal diameter D of the tube. The threshold potential V_m has been found to increase almost linearly with d. The net $\pm\triangle_i$ and the relative Joshi effect $\pm\%\triangle_i$ have increased with d to a maximum and then decreased with the increase in the applied potential V and changed its sign to $-\triangle_i$ above an immersion potential V_i. That at constant V, current in dark, i_D decreases with d indicates that $V_{+\triangle i max}$ increases with d and in consequence, V_i increases with d. As V_m increases

with d, V_i also should increase with d. The results have been explained on the basis of Joshi theory for the phenomenon $\triangle_i$.

इलेक्ट्रोडों के बीच की दूरी d का ऋणात्मक जोशी प्रभाव $-\triangle_i$ (विसर्जन धारा i का प्रकाशिक ह्रास) पर प्रभाव का पूर्ण अन्वेषकों [1-3] द्वारा अध्ययन किया गया है। तथापि, धनात्मक जोशी प्रभाव $+\triangle_i$ (i की प्रकाशिक वृद्धि) का इस दृष्टि से अध्ययन नहीं हुआ है। अतः प्रस्तुत अन्वेषणों का, स्लीव उत्तेजन के द्वारा हैलोजेनों में, अधिक $\pm\triangle_i$ के अनुकूल प्रतिबन्धों के अन्तर्गत, अध्ययन इस दृष्टि से किया गया है कि $\pm\triangle_i$ का अन्य कारकों के स्थिर रहने पर, अंतरास्लीव दूरी d के साथ क्या सम्बन्ध है।

प्रयोगात्मक

उपकरण का सामान्य समुच्चय तथा प्रयोगात्मक प्रक्रिया लेखक के पूर्व प्रकाशित लेखों [4,5] के समान थीं। सोडा कांच की बेलनाकार, बाह्य ताम्र-स्लीव इलेक्ट्रोडों सहित तथा हैलोजेनों ($p\,Cl_2=4$ मिमी, पारद, 20°C; pBr_2 तथा $pI_2=20$°C पर संगत वाष्प दाब) से युक्त तीन नलिकाओं को 50 चक्रों वाली ए०सी० द्वारा उत्तेजित किया गया। अंतरास्लीव दूरी को 1 से 20 सेमी परास के अन्तर्गत बदला गया और संगत $\pm\triangle i$ का, स्थिर अनुप्रयुक्त विभव V तथा गैस दाब p पर, अध्ययन किया गया।

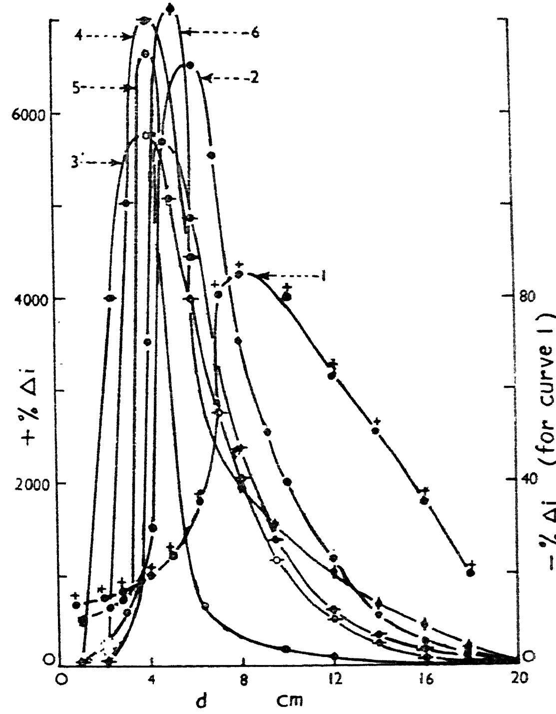
परिणाम तथा विवेचना

गैस दाब p तथा नलिका के व्यास D के स्थिर रहने पर, पाशेन विभव की भाँति, देहली विभव V_m अंतरास्लीव दूरी d के साथ लगभग एकघाततः परिवर्तित होता है। समान प्रतिबन्धों के अन्तर्गत, $+\triangle i$, d के साथ 4 सेमी तक बढ़ता और फिर घटता है, जबकि $+\%\triangle i$ 5 सेमी पर अधिकतम है (चित्र 1)। $-\triangle i$ तथा $-\%\triangle i$ की d के साथ इसी प्रकार की वृद्धि और ह्रास प्रकट होते हैं। अनुप्रयुक्त विभव V बढ़ाने पर, $+\triangle i$ का $-\triangle i$ में व्युत्क्रमण होता है और d के बढ़ने से यह व्युत्क्रमण विभव Vi वृद्धि की ओर प्रवृत्त होता है।

विसर्जन के दौरान इलेक्ट्रोडों पर निर्मित सक्रियित सतह के बाह्य प्रकाश के द्वारा इलेक्ट्रॉन की उत्पत्ति की जोशी सिद्धान्त[6-8] परिकल्पना करता है। विद्युत ऋणी गैस कणों द्वारा इन प्रकाशिक इलेक्ट्रानों का प्रग्रहण मंद गतिमान ऋण आयनों को उत्पन्न करता है जो कि अंतराकाशी आवेश के रूप में i को घटा देते हैं। वे प्रकाशिक इलेक्ट्रॉन जिनका इस प्रकार प्रग्रहण नहीं होता है, इलेक्ट्रॉन बहुलता के द्वारा $+\triangle i$ उत्पन्न करते हैं। $+\triangle i$ तथा $-\triangle i$ की सह-उपस्थिति[9] बतलाती है उपर्युक्त दोनों प्रक्रम साथ-साथ चलते हैं और प्रेक्षित प्रकाशिक परिवर्तन, धारा सूचक द्वारा प्रदर्शित, दोनों प्रभावों का बीजगणितीय योग है।

स्थिर V, p तथा D पर, धारा i_D तथा Vm का d के साथ बढ़ना प्रदर्शित करता है कि d के साथ $V_{\triangle+i\max}$ बढ़ना चाहिये और, व्युत्क्रमण के लिए, d के साथ Vi बढ़ाना चाहिए। अथच, $\triangle i$ के तल के रूप में इलेक्ट्रोड सतह की जोशी सिद्धान्त[6] की अपेक्षा है कि d की सीमित वृद्धि (1-5 सेमी) पर, क्योंकि $+\triangle i$ अप्रग्रहीत प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनों के द्वारा इलेक्ट्रॉन बहुलता का परिणाम है, $+\triangle i$ में वृद्धि की सम्भावना

है । d के 5 सेमी से अधिक होने पर $+\triangle i$ में क्रमिक ह्रास, विसर्जन के दौरान इलेक्ट्रोडों पर निर्मित सक्रियित सतह से बाह्य विकिरण के कारण उत्पन्न इलेक्ट्रॉन में ह्रास की सम्भाव्यता की घटना के कारण हो सकता है; जिसका परिणाम अप्रग्रहीत प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनों द्वारा इलेक्ट्रॉन बहुलता भी और अतएव, $+\triangle i$ में क्रमिक ह्रास है । इसी प्रकार, $-\triangle i$ के लिये, विद्युत् ऋणी गैस कणों के द्वारा मुक्त प्रकाशिक इलेक्ट्रॉनों के प्रग्रहण के कारण निर्मित ऋण आयनों से, जो कि अंतराकाशी-आवेश-प्रभाव के कारण i को घटा देते हैं, d के साथ $-\triangle i$ का एक अधिकतम तक बढ़कर क्रमशः घटने से $-\triangle i$ के बढ़ने की पूर्ण व्याख्या हो जाती है ।



चित्र 1 : हैलोजेनों में जोशी प्रभाव $\%\triangle i$ का अंतराइलेक्ट्रोड दूरी d से साथ परिवर्तन

वक्र 1 : 6·90 kV पर क्लोरीन में $-\%\triangle i$ का d के साथ परिवर्तन;

2 : 4·80 kV पर क्लोरीन में $+\%\triangle i$ का d के साथ परिवर्तन;

3 : 2·40 kV पर ब्रोमीन में $+\%\triangle i$ का d के साथ परिवर्तन;

4 : 2·93 kV पर ब्रोमीन में $+\%\triangle i$ का d के साथ परिवर्तन;

5 : 1·67 kV पर आयोडीन में $+\%\triangle i$ का d के साथ परिवर्तन;

6 : 1·93 kV पर आयोडीन में $+\%\triangle i$ का d के साथ परिवर्तन ।

हैलोजेनों में दृश्य तथा अवरक्त दोनों $\triangle i$ की उपस्थिति सिद्ध करती है कि हैरीज़ एवं फॉन ऐंजिल[2,3] की क्रियाविधि असंतोषजनक है। गौण इलेक्ट्रॉन उत्सर्जन γ तथा $\eta\theta g$ प्रक्रमों[11] का परिणामहै। क्योंकि इलेक्ट्रॉन संलगन इन प्रक्रमों की सीमा को घटा देता है, उनकी वृद्धि बाह्य विकिरण पर निर्भर होनी चाहिये। तथा, $+\triangle i$ और $-\triangle i$ की सह-उपस्थिति की व्याख्या हैरीज़ एवं फॉन ऐंजिल की क्रियाविधि पर सम्भव नहीं है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० वेनुगोपालन का उनके अमूल्य सुझावों के लिये आभारी है।

निर्देश

1. मोहंती, एस० आर०, प्रसादा राव, टी० डी० तथा रमय्या, आर०, **जर्न० इंडियन केमि० सोसा०**, 1954, **31**, 539
2. हैरीज़, डब्लू० एल० तथा फॉन ऐंजिल, ए०, **जर्न० केमि० फिजि०**, 1951, **19**, 514
3. हैरीज, डब्लू० एल० तथा फॉन ऐंजिल, ए०, **प्रोसी० फिजि० सोसा०**, 1951, B 64, 916
4. प्रसाद, जे०, **ऐक्टा सिएसिया इंडिका**, (प्रेषित)
5. प्रसाद, जे०, **रिव० रुमेन किमि०**, 1973, **18**, 1075
6. जोशी, एस० एस०, **प्रोसी० इंडियन सांइस कांग्रे०**, भाग III, फिजि० सेक्स०, 1946, ऐब्स० 26; 1947, ऐब्स० 25
7. जोशी, एस० एस०, **करेंट सांइस**, 1946, **15**, 281
8. जोशी, एस० एस०, **वही**, 1947, **16**, 19
9. प्रसाद, जे० **काइनेटिका आइ काटेलिज**, 1977, **18**, 497
10. प्रसाद, जे०, **एक्टा सिएसिया इंडिका**, (प्रेषित)
11. लॉब, एल० बी०, "Fundamental Processes of Electrical Discharge through Gases", जॉन विले एन्ड सन्स, न्यूयार्क 1939

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No 2, April, 1980, Pages 165-171

ThO_2 द्वारा फास्फेट आयनों के निष्कासन पर पी-एच तथा ताप का प्रभाव

वी० एन० सिंह, गुर प्रसाद, कमल के० जैन तथा आई० एस० सिंह

अनुप्रयुक्त रसायन अनुभाग, इंस्टीच्यूट आफ टेक्नालाजी
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—मई 31, 1979]

सारांश

जल में फॉस्फेट आयनों की अधिक मात्रा(>10 ppb) द्वारा जल कायों (bodies) का इयूट्रोफिकेशन (eutrofication) हो जाता है। प्रस्तुत शोधपत्र में ^{32}P के अनुप्रयोग से जलीय विलयनों से ThO_2 द्वारा फास्फेट आयनों के निष्कासन का विवरण दिया गया है। ताप तथा पी-एच के प्रभाव का अध्ययन किया गया है और इस प्रकार प्राप्त परिणामों का ThO_2 की क्रिस्टल संरचना तथा निकाय के आयन विनिमय गुण की दृष्टि से स्पष्टीकरण किया गया है।

Abstract

Effect of pH and temperature on the removal of PO_4 ions by ThO_2 using tracer technique. *By* V.N. Singh, Gur Prasad, Kamal K. Jain, I.S. Singh, Applied Chemistry Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

The excess of phosphate ions (>10 ppb) in water results in eutrophication of water bodies. The present paper deals with the removal of phosphate ions from aqueous solutions by ThO_2 using ^{32}P as tracer. The effect of temperature and pH has been studied and the results thus obtained have been explained in the light of the crystal structure of ThO_2 and the ion exchange property of the system.

शैवाल की वृद्धि के लिये पानी में फॉस्फेट की उपस्थिति लाभप्रद होती है। शैवाल पुष्पपुंजों के उत्पादन के लिए फॉस्फेट आयनों के रूप में फास्फोरस की न्यूनतम आवश्यकता 10ppb होती है। कुछ प्रकार के शैवाल जानवरों के लिए विषाक्त होते हैं और स्वास्थ्य-संकट उत्पन्न कर सकते हैं[1]। जल/रद्दी जल से फास्फेट का निष्कासन कई विधियों द्वारा किया जा सकता है[2] जैसे, भौतिक, रासायनिक, तथा जैविक। इन विधियों में से आयन विनिमय विधि प्रभावी तथा मितव्ययी प्रक्रम प्रतीत होती है क्योंकि विनिमायक को पुनर्योजित किया जा सकता है। क्षीण भास्मिक रेज़िनों की तुलना में सोडियम हाइड्रॉक्साइड

द्वारा पुनर्योजित उच्चतः भास्मिक रेज़िन विनिमायक प्रयोग करने में अधिक व्यय होता है और उच्चतः भास्मिक रेजिनों का पुनर्योजन, क्षीण भास्मिक रेजिन विनिमायकों की तुलना में एक कम सक्षम प्रक्रम है[3]।

कुछ शोधकर्ताओं ने [4] आयन विनिमय रेजिनों और रद्दी जल शोधन में उनके लाभ की समीक्षा की है। आइजेनमन तथा स्मिथ [5] द्वारा द्वितीयक मलनिस्राव से फास्फेट निष्कासन के लिए आयन विनिमय झिल्लियों का प्रयोग किया गया। डिडेंको [6] ने आयन विनिमय द्वारा फास्फेट निष्कासन पर पी-एच के प्रभाव का अध्ययन किया। बोरी तथा सहयोगियों ने [7] वरणात्मक आयन विनिमय द्वारा फास्फेट निष्कासन का अध्ययन किया है।

नेस्बिट [8] ने नगरपालिकाओं के रद्दी जल से फास्फेट निष्कासन के लिए आयन विनिमय विधि का प्रयोग किया है। औद्योगिक रद्दी पदार्थों से फास्फोरस निष्कासन के लिए सामान्य अवरणात्मक रेज़िनों के प्रयोग से बड़ी मात्रा में पुनर्योजी व्यर्थ के निस्तारण की तथा विस्तृत प्रक्रम उपस्कर के उपयोग की समस्या उठेगी। वरणात्मक कार्बनिक [9] / अकार्बनिक विनिमायकों के प्रयोग द्वारा इस कठिनाई को कम किया जा सकता है। डे तथा सहयोगियों ने [10] धनायन विनिमायक के रूप में थोरियम फास्फेट का उपयोग किया है। प्रस्तुत अन्वेषण में जलीय विलयनों से फास्फेट निष्कासन के लिए ऋणायन विनिमायक के रूप में थोरियम ऑक्साइड का उपयोग किया गया है।

प्रयोगात्मक

प्रस्तुत अन्वेषणों के लिए अधिशोषक ThO_2 (A.R.,B.D.H.) को मफल भट्टी में लगभग 8 घन्टे तक 800^0C पर गरम किया गया और फिर उसी भट्टी में धीरे-धीरे कमरे के ताप तक ठंडा किया गया। फिर 200 छिद्र वाली चलनी से चाल कर चूर्ण प्राप्त किया गया। प्रस्तुत अध्ययन, वांच्छित ताप पर विभिन्न सान्द्रताओं वाले (10^{-12} से 10^1 मोल) विद्युत अपघट्य विलयन ($NaH_2\ PO_4\cdot 2H_2O$) के 10 मिली को ThO_2 के 0·5 ग्रा. में मिलाकर किया गया। फास्फेट विलयनों को ^{32}P द्वारा अनुरेखित किया गया। अधिशोषक तथा अधिशोषित निकायों को निश्चित ताप पर रखा गया और अधिशोषण की प्रगति का आकलन संतृप्तता तक विभिन्न समयों के अन्तराल पर विलयन के समभाग में रेडियोऐक्टिवता के द्वारा किया गया [11]।

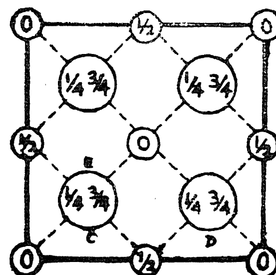
परिणाम तथा विवेचना

अधिशोषक थोरियम डाइआक्साइड (ThO_2) फ्लुओराइट प्रकार की संरचना वाला होता है[12] (चित्र 1) और निकाय $a_0 = 5{\cdot}5997\ A°$ पर घनाकृतिक फलक केन्द्र वाला होता है। इकाई सेल में आक्साइड के चार अणु होते हैं। परमाण्वीय स्थितियाँ निम्न अणु-विन्यास समूह (space group) द्वारा उत्पन्न होती हैं:

O_h (Fm 3m)

R : (4a)000 F. C.

X : (8c)$\pm$ ($\frac{1}{4}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{4}$); F.C.



चित्र 1. ThO_2 की फ्लुओराइट प्रकार की संरचना

जहाँ R थोरियम तथा X ऑक्सीजन परमाणुओं को व्यक्त करता है। थोरियम क्रिस्टलों में (110) तल जालक आक्साइड आयनों पर चतुर्वलन उपसहसंयोजित थोरियम परमाणुओं वाला होता है और इस तल में इन परमाणुओं के साथ आक्साइड आयन संबद्ध रहते हैं। इस प्रकार थोरियम आक्साइड क्रिस्टलों को संघटित करने वाले विभिन्न महत्वपूर्ण तल विभिन्न कोटि की असंतृप्तता तथा पृष्ठीय परिवेश वाले होते हैं (सारणी 1)। थोरियम आक्साइड एक अम्ल तथा भस्म दोनों ही रूपों में वियोजित हो सकता है और पृष्ठ पर धनात्मक तथा ऋणात्मक आवेश उत्पन्न कर सकता है। इस प्रकार यह स्पष्ट हो जाता है कि H^+ आयन तथा OH^- आयन आक्साइड अधिशोषक के घटक होते हैं और इन आयनों के प्रति पृष्ठ-उष्मागतिक उत्क्रमणीयता की अवस्था में होता है। अत: H^+ तथा OH^- आयन, जल अथवा विद्युत अपघट्य विलयनों के सम्पर्क में परिणामी हाइड्रॉक्सिलीकृत ऑक्साइड पृष्ठ के प्रति विभव-निर्धारक आयन होते हैं। यहाँ यह बता देना वांच्छनीय है कि ThO_2 (उभयधर्मी प्रकृति) के सम्पर्क में विद्युत-अपघट्य विलयन में अन्य धनायन तथा ऋणायन अविभव-निर्धारक स्पीशीज होते हैं।

सारणी 1

ThO_2 की क्रिस्टल संरचना

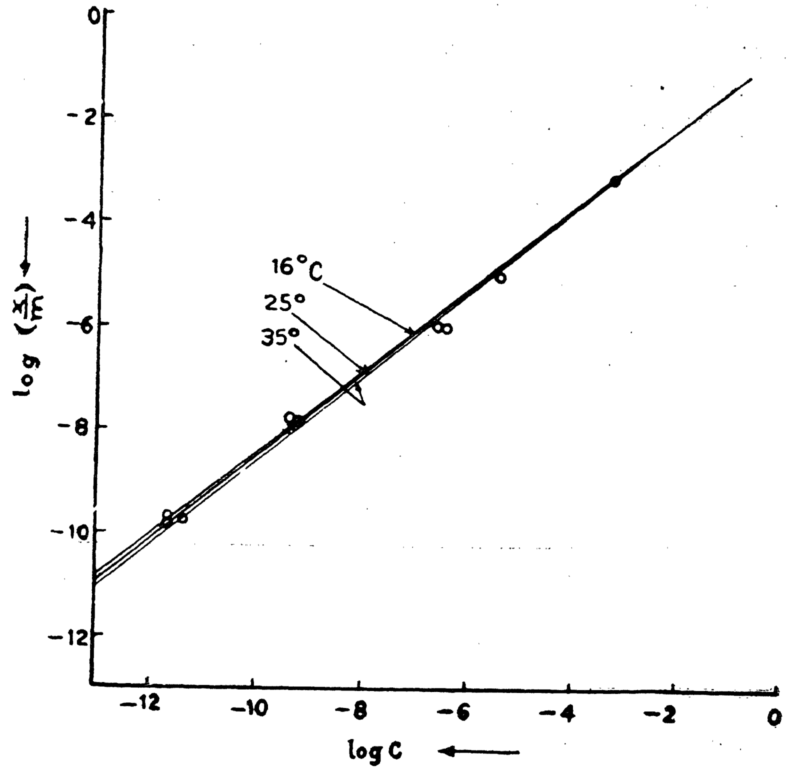
पदार्थ	फलक	धनायनों की प्रभावी संख्या	ऋणायनों की प्रभावी संख्या (O^{2-})
	100	1	0
ThO_2	110	$1\frac{1}{2}$	4
	111	$\frac{7}{8}$	0

थोरियम डाइआक्साइड द्वारा फास्फेट आयनों के निष्कासन का स्पष्टीकरण फ्रायण्डलिक समतापी वक्र द्वारा किया जा सकता है (चित्र 2)। विभिन्न तापों पर $1/n$ मानों को सारणी 2 में सूचीबद्ध किया गया है। जल में अधिशोषक से फास्फेट आयनों का प्रतिशत विशोषण सारणी 3 में दिया गया है। साम्यावस्था थोड़े समय में ही स्थापित हो जाती है (चित्र 3)। अधिशोषण ऊष्मा के ऋणात्मक मान (सारणी 4) प्रदर्शित करते हैं कि अभिक्रिया उष्माक्षेपी है अर्थात् ताप का बढ़ना अधिशोषण के अनुकूल नहीं है। इसके अतिरिक्त ये मान 20.925 किलो जूल प्रति मोल की कोटि के हैं। ये परिणाम भौतिक अधिशोषण का समर्थन करते हैं।

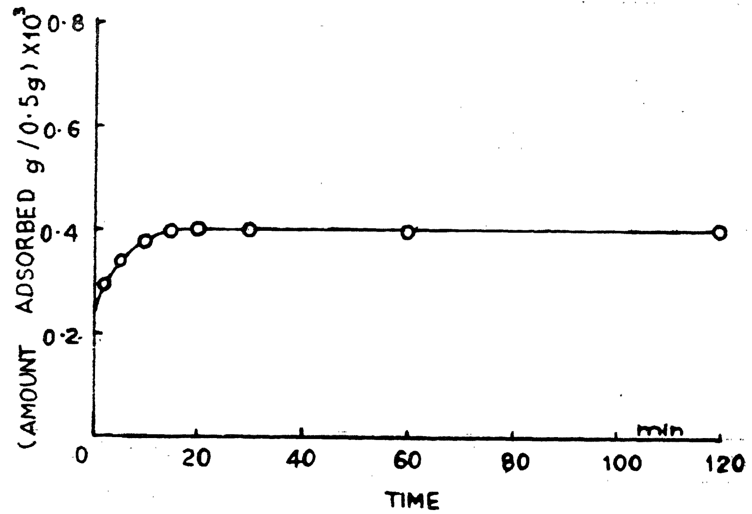
सारणी 2

ThO_2 पर PO_4^{3-} आयनों के अधिशोषण के लिए लाग (X/m) के विरुद्ध Cequil के आलेख से गणना किये गये $1/n$ के मान

निकाय	ताप °C	$1/n$	समतापी वक्र का प्रकार
	16	0·799	फ्रायंडलिक
$ThO_2-PO_4^{3-}$	25	0·800	फ्रायंडलिक
	35	0·800	फ्रायंडलिक



चित्र 2. फ्रायंडलिक समतापी वक्र की वैधता



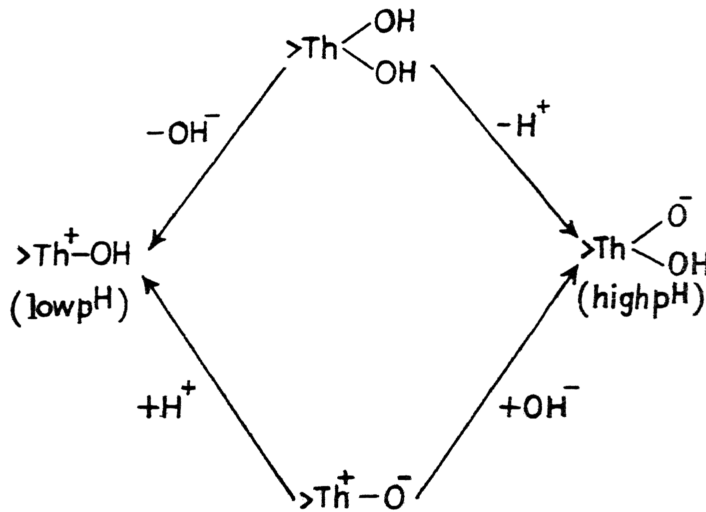
चित्र 3. अधिशोषण की दर

सारणी 3

$PO^{3}_{4}{}^{-}$ आयनो का अधिशोषण तथा विशोषण: अधिशोषित का प्रारंभिक सान्द्रण 1×10^{-3}M; ताप $35 \pm 0{\cdot}1°C$

अधिशोषक	प्रतिशत अधिशोषण	जल में प्रतिशत विशोषण
ThO_2	42·2	39·6

अधिशोषित फास्फेट आयनों की मात्रा 2·6 से 3·8 पी-एच परिसर में स्थिर रहती है और उसके बाद अध्ययन किये गये अधिकतम पी-एच 8·6 तक शीघ्रता से गिर जाती है (चित्र 4)। पी-एच के साथ अधिशोषित मात्रा में परिवर्तन का संबंध, पृष्ठीय हाइड्राक्सिल यौगिकों के बनने और पृष्ठीय घनात्मक आवेश उत्पन्न होने के साथ इसका अनुगामी वियोजन हो सकता है, जो विलयन के पी-एच पर निर्भर करता है। पी-एच साथ परिवर्तन के साथ, H^+ तथा OH^- सान्द्रता परिवर्तित हो जाती है और यह परिवर्तन H^* तथा OH आयनों के साथ पृष्ठ की अन्योन्य क्रिया के कारण कुछ सीमा तक अधिशोषण की मात्रा को प्रभावित करता है। थोरियम डाइऑक्साइड पृष्ठ से अम्लीय अथवा क्षारीय विलयन से निम्न प्रकार से व्यवहार करने की अपेक्षा की जाती है :



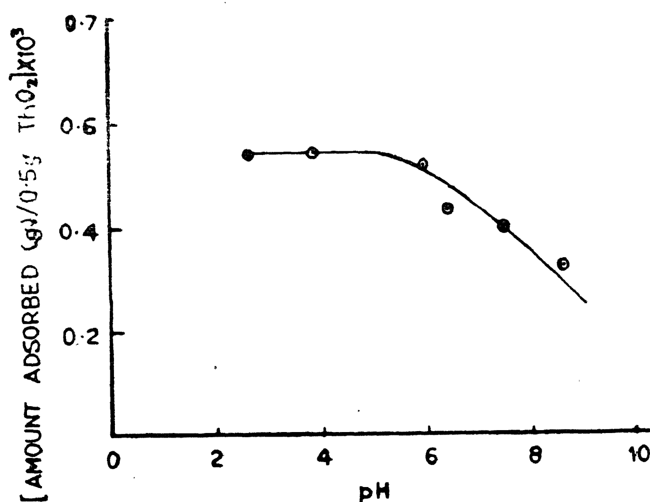
इस प्रकार आक्साइड अधिशोषक के आयन-विनिमय गुणों के आधार पर ThO_2 द्वारा PO_4^{3-} आयनों का ग्रहण स्पष्ट किया जा सकता है। पृष्ठीय आक्साइड स्तर दो रूपों में आयन-विनिमायक की भाँति कार्य करता है--(i) H^+ आयन अधिशोषण द्वारा अम्ल विलयन में ऋणायन विनिमायक तथा (ii) OH^- आयनों के अधिशोषण द्वारा अम्ल भास्मिक विलयनों में धनायन विनिमायक। निम्न पी-एच पर H^+ आयन वैद्युत द्विगुण स्तर का अन्तर भाग और PO_4^{3-} आयन द्विगुण स्तर का वाह्य भाग बनाते हैं। इस प्रकार PO_4^{3-} या तो द्विगुण स्तर के विसरित स्तर में हो सकते हैं और या अधिशोषक पृष्ठ के भीतर

जा सकते हैं। पृष्ठ से सम्बद्ध अन्य ऋणायन जैसे Cl^- के आयन विनिमय द्वारा भी अधिशोषण हो सकता है। क्लोराइड आयनों की उपस्थिति, HCl मिलाने से निम्न पी-एच पर, लवण विलयनों के बनाने के कारण होती है।

सारणी 4

विभिन्न तापों पर अधिशोषण समतापी वक्रों से गणना की गई अधिशोषण की समविन्यासी उष्मा

निकाय	ग्रा./ग्रा. अधिशोषित में पृष्ठ पर आयनों की मात्रा	अधिशोषण की उष्मा (किलो जूल प्रति मोल)
	1.0×10^{-8}	—31.889
ThO_2—PO_4^{3-}	1.0×10^{-6}	− 16.991
	1.0×10^{-4}	—16.991
	1.0×10^{-2}	—9.541



चित्र 4. अधिशोषण पर पी-एच का प्रभाव

निर्देश

1. अलगरस स्वामी, एस० आर०, भालेराव, वी० वी० तथा राजगोपालन, एस०, **इण्डि० जर्न० एनवाइरान० हेल्थ**, 1973, 15 (1), 59

2. जैन, कमल के०, प्रसाद जी० तथा सिंह, वी० एन०, **जर्न० साइं० रिस०, बी० एच० यू०**, 1976-77, XXVII (1-2), 113-120

3. वेवर, डब्ल्यू० जे० जूनि०, "फिजिकोकेमिकल प्रोसेसेस फार वाटर क्वालिटी कण्ट्रोल", वाइले इंटर-साइंस, 1972, पृष्ठ 297

4. हिम्सले, ए० तथा मेकार्वे, एफ० एक्स०, **आयन एक्सचेंज मेम्ब्रेन्स**, 1973, 1, 3, 148; **केमि० ऐब्स०**, 1974, **80**, 124 --293,

5. आइज़ेनमन, जे० एल० तथा स्मिथ, जे० डी०, **पी० बी० रिपोर्ट**, 228108, **यू० एस० नेश० टेक० इन्फा० सर्विस, स्प्रिंगफील्ड**, 1973, 5A; **केमि० ऐब्स०** 1974, **81**, 41110, b 1974

6. डिडेंको, ए० ए०, Tr Vses. Nauch. Issled. Inst. Vodosnabzh. Kanaliz. Gidrotekh Sooruzhenni Inzh. Gidrogel. (U.S.S.R.) 1972, **40**, 5 **केमि० ऐब्स०** 1974, **81**, 140503 p

7. बोरी, जी०, लिवर्टी. एल० तथा पैसीनो, आर०, **वाटर रिसर्च**, 1976 **10**, 421

8. नेस्बिट, जे० वी०, **इंजीनियरिंग रिस० बुलेटिन** B-93, पेन्सिलवेनिया स्टेट यूनिवर्सिटी, फरवरी 1976

9. पोलियो, एफ० ऐक्म० तथा कूनिन, आर०, **एनवाइरान० साइं० टेक्नो०**, 1968, **2**, 24

10. डे, ए० के० तथा चौधरी, के०, **जर्न० आफ क्रोमैटोग्रा०**, 1974, **101**, 63-74

11. सिंह, आई० एस०, सिंह, वी० एन०, त्रिपाठी, आर० तथा शुक्ला, वी० एम०, **जेड० फिजि० केमि०**, 1973, **83**, 305

12. विकाफ, आर० डब्ल्यू० जी०, **क्रिस्टल स्ट्रक्चर**, भाग 1, जान वाइले एण्ड संस एन० वाई०, 1963

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 2, April, 1980, Pages 173-182

फिनेन्थ्रोलिन एवं ऐरोमैटिक हाइड्रॉक्सीकार्बोक्सिलिक अम्लों के मिश्र संलग्नी ताम्र (II) संकुल*

भारती अग्रवाल, बद्री विशाल अग्रवाल तथा अरुण कुमार दे

रसायन विभाग, प्रयाग विश्वविद्यालय, प्रयाग

[प्राप्त—अक्टूबर 1, 1979]

सारांश

फिनेन्थ्रोलिन एवं ऐरोमैटिक हाइड्रॉक्सीकार्बोक्सिलिक अम्लों : o-क्रिसोटिक अम्ल (o — CA)/m-क्रिसोटिक अम्ल (m — CA)/हाइड्राक्सीनेफ्थोइक अम्ल (HNA) संलग्नकों का प्रयोग करते हुए ताम्र (II) के तीन मिश्र संलग्नी संकुल प्राप्त किये गये। इनके अभिलक्षणन हेतु तात्विक एवं उष्माभारमितीय विश्लेषणों के अतिरिक्त अवरक्त, दृश्यप्रकाश तथा इलेक्ट्रान चक्रण अनुनाद वर्णक्रमीय और चुम्बकीय प्रवृत्ति विधियाँ प्रयुक्त की गयी हैं। तीनों संकुलों के इलेक्ट्रान चक्रण अनुनाद वर्णक्रमों से प्राप्त $g_{\perp}$ एवं $g_{\|}$ राशियों तथा विभिन्न इलेक्ट्रानिक संक्रमणों के ऊर्जा मानों का प्रयोग कर चक्रण कक्षा युग्मन स्थिरांक $\lambda_{\perp}$ और $\lambda_{\|}$ के मान परिकलित किये गये। अन्तर $\lambda_{\perp} - \lambda_{\|}$ को λ की दिशात्मक निर्भरता का मापदंड मानते हुए यह निष्कर्ष निकलता है कि मिश्र संलग्नी संकुलों में यह विभिन्न संलग्नकों की क्षेत्र प्रबलताओं में अन्तर की वृद्धि के साथ वृद्धिगत होती है। साथ ही न्यूनीकरण गुणक k के आपेक्षिक मानों से यह कह सकते हैं कि Cu — Phen — (o-CA) संकुलन में सर्वाधिक सहसंयोजकता विद्यमान है।

Absrtact

Mixed ligand complexes of copper (II) with 1 : 10 phenanthroline and aromatic hydroxy carboxylic acids. *By* Bharati Agarwal, B. V. Agarwala and Arun K. Dey, Chemical Laboratories, University of Allahabad, Allahabad.

Using 1:10 phenanthroline (phen) and o-cresotic acid (o-CA)/m-cresotic acid (m-CA) / hydroxynaphthoic acid (HNA) ligands, three mixed ligand complexes of copper (II) have been isolated. They have been charcterised by ır, uv-vis, reflectance,

*67वीं भारतीय विज्ञान कांग्रेस की रसायन शाखा में प्रस्तुत

esr spectral studies and magnetic susceptibility measurements alongwith elemental and thermogravimetric analyses. The complexes having distorted octahedral geometry with normal magnetic moments may be represented by [Cu. Phen. L.$(H_2O)_2$] xH_2O (where L is doubly deprotonated o-cA/m-CA/HNA). $g_\perp$ and $g_{||}$ values from the esr spectra and energies of various electronic transitions spin orbit coupling constants $\lambda_\perp$ and $\lambda_{||}$ have been determined. Taking $(\lambda_\perp - \lambda_{||})$ as a measure of directional dependence of λ, it appears that the dependence increases with difference in ligand field strengths of the ligands in a mixed ligand complex.

मिश्र संकुलों के अध्ययन क्रम में [1, 2] प्रस्तुत प्रपत्र में ताम्र (II) के यौगिकों का वर्णन किया जा रहा है। ये यौगिक 1 : 10 फिनेन्थ्रोलिन (फिने, Phen) एवं o-क्रिसोटिक अम्ल (o-CA)/m-क्रिसोटिक अम्ल (m-CA)/हाइड्रॉक्सीनेफ्थोइक अम्ल (HNA) संलग्नियों को प्रयोग कर प्राप्त किये गये हैं। ठोस अवस्था में प्राप्त इन यौगिकों के अध्ययन हेतु तात्विक विश्लेषण के अतिरिक्त अवरक्त, पराबैंगनी एवं दृश्य-प्रकाश, इलेक्ट्रान चक्रण अनुनाद आदि वर्णक्रमीय तकनीक तथा चुम्बकीय मापन एवं उष्माभारमिति प्रयुक्त की गई हैं, और प्राप्त परिणाम यहाँ विवेचित किये गये हैं।

प्रयोगात्मक

संकुलों की निर्मिति : (i) Cu (II)—Phen—(o-CA), (ii) Cu (II)—Phen—(m-CA) एवं (iii) Cu (II)—Phen—(HNA) : 0·25M ताम्र (II) सल्फेट (बीडीएच ऐनालार) विलयन के 10 मिली में 0·25M फिनेन्थ्रोलिन विलयन के 10 मिली मिलाये गये। अलग से 0·25M o-CA (फ्लूका)/m-CA (फ्लूका)/HNA (रोडेल) विलयन के 10 मिली को 0·50M NaOH के 5 मिली से उदासीन किया गया। इस प्रकार प्राप्त अम्ल के सोडियम लवण विलयन को पूर्वोक्त ताम्र-फिने विलयन में अनवरत विलोडन करते हुए मिलाया गया। तत्काल हरे रंग का अवक्षेप प्राप्त हुआ। इसे छाना गया (निस्यंद हल्के हरे रंग का था) तथा जल से कई बार धोकर 50° पर सुखाया गया।

वर्णक्रमिकीय अध्ययन : सभी संलग्नियों एवं संकुलों के अवरक्त वर्णक्रम आलेख पोटैसियम ब्रोमाइड में परकिन एल्मर ग्रेटिंग-इन्फ्रारेड स्पेक्ट्रोफोटोमीटर माडल 577 द्वारा प्राप्त किये गये।

सभी संकुलों के पराबैंगनी एवं दृश्य प्रकाश परावर्तकता वर्णक्रम आलेख-drs (ठोस अवस्था में) MgO प्रयोग करते हुए VSU—2P स्पेक्ट्रोफोटोमीटर द्वारा विभिन्न तरंग दैर्घ्यों पर अवशोषण ज्ञात कर प्राप्त किये गये।

प्रत्येक संकुल के लिए सामान्य तापमान पर इलेक्ट्रान चक्रण अनुनाद वर्णक्रम एक वेरियन V—4502—12 ESR स्पेक्ट्रोफोटोमीटर द्वारा (100 किसा०/से० माडुलन) आलेखित किया गया। DPPH को मानक g संकेतक के रूप में प्रयुक्त किया गया।

चुम्बकीय आघूर्ण : सभी संकुलों के चुम्बकीय प्रवृत्ति मापन फेराडे विधि द्वारा एक मेटलर तुला प्रयोग करते हुए किये गये तथा उनसे चुम्बकीय आघूर्णों की गणना की गयी।

उष्माभारमितीय अध्ययन : इनके परिणाम एफ० सी० आई० सिन्दरी निर्मित उत्ताप तुला (तापन गति 10° प्रति मिनट) द्वारा प्लेटिनम क्रुसिबल प्रयोग करते हुए प्राप्त किये गये ।

परिणाम तथा विवेचना

तात्विक विश्लेषणों के परिणाम, संकुलों के सूत्र एवं वर्ण सारिणी (1) में संकलित किये गये हैं ।

सारणी 1

तात्विक विश्लेषणों के परिणाम एवं वर्ण

क्र०	सूत्र	वर्ण	कार्बन% प्रायोगिक (परिकलित)	हाड्रोजन% प्रायोगिक (परिकलित)	ताम्र% प्रायोगिक (परिकलित)
(i)	*Cu . Phen . (o-CA) $3H_2O$	गंदमी हरा	53·55	4·49	13·63
			(53·60)	(4·47)	(14·21)
(ii)	*Cu . Phen . (m-CA) $3{\cdot}5H_2O$	श्वेती हरा	51·82	4·28	13·28
			(52·54)	(4·60)	(13·93)
(iii)	*Cu . Phen . (HNA) $2{\cdot}5H_2O$	पीत हरा	58·45	3·98	13·24
			(58·16)	(4·00)	(13·40)

*कोष्ठक के संलग्नी से दो प्रोटान मुक्त होते हैं, परिणामतः वह दो ऋणावेश युक्त है ।

विलेयता : सभी संकुल नाइट्रोबेंजीन, डाईमेथिल फार्मामाइड और डाईमेथिल सल्फाक्साइड में विलेय हैं, परन्तु मेथेनाल, एथेनाल, क्लोरोफार्म, ईथर, ऐसीटोन व बेंजीन में अविलेय हैं ।

अवरक्त वर्णक्रम : सभी संलग्नियों एवं संकुलों के अवरक्त वर्णक्रम आलेखों के तुलनात्मक अध्ययन से ज्ञात होता है कि एरोमैटिक हाइड्रॉक्सीअम्लों के कार्बोक्सिलिक एवं फिनालिक दोनों ही क्रियात्मक समूह संकुल निर्मिति में भाग ले रहे हैं । कार्बोक्सिलिक समूह के विभिन्न अभिलक्षणिक बैंड (अवरक्त वर्णक्रम सम्बन्धी विवेचनों में आवृत्तियाँ सेमी$^{-1}$ में व्यक्त की गयी हैं)-2500—2700, 1650—60, ~1300 और 900, जो कि o-CA, m-CA और HNA के वर्णक्रमों में विद्यमान हैं, संकुलों में परिलक्षित नहीं होते हैं । इनके स्थान पर COO^- के असममित व सममित प्रतान बैंड क्रमशः ~1575 और ~1385 सेमी$^{-1}$ पर तीनों संकुलों में विद्यमान हैं इसी प्रकार OH (फिनालिक) प्रतान बैंड, जो कि संलग्नियों में ~3250 पर पाया जाता है, भी संकुलों में नहीं हैं तथा νC—O (फिनालिक) बैंड संलग्नियों (~1230) की अपेक्षा संकुलों में उच्च आवृत्ति [3,4] पर पाया जाता है । स्पष्टतः कार्बोक्सिलिक व फिनालिक दोनों ही क्रियात्मक

समूह प्रोटान मुक्त कर धातु आयन Cu (II) से सम्बद्ध हो जाते हैं। यहाँ यह ज्ञातव्य है कि इसी प्रकार के Fe (II) के यौगिकों में [2] केवल कार्बोक्सिलिक समूह ही संकुलन क्रिया में भाग लेता है और फिनालिक पूर्ववत बना रहता है।

फिने का C=N बैंड (1618) सभी संकुलों में उच्च आवृत्तियों को स्थानान्तरित हो जाता है। ऐसा सम्भवत: संकुलों में सिगमा बंधन के अतिरिक्त पाई बंधन की उपस्थिति के कारण होता है, जिसके फलस्वरूप फिने में इलेक्ट्रान घनत्व और परिणामत: C=N बंध कोटि बढ़ जाती है[5]। इसके अतिरिक्त फिने के परमाणुओं की असमतल गति से सम्बद्ध बैंड -708 व 738 भी संकुलन के पश्चात् उच्च आवृत्तियों को स्थानान्तरित हो जाते हैं [5,6] साथ ही इन बैंडों में कुछ विपाटन भी हो जाता है।

उष्माभारमिति : संकुलों के उष्माभारमितीय अध्ययन से यह ज्ञात होता है कि यौगिकों में भार का ह्रास दो चरणों में होता है। प्रथम चरण में ह्रास का क्रम 60-70° से प्रारम्भ होता है और इसकी गति मंद रहती है। प्रथम चरण में हुई भार में कमी को जलाणु मुक्त होने के कारण माना जाय (जिसकी कि प्रबल सम्भावनाएं हैं) तो यह तीनों यौगिकों के लिये क्रमश: (i) 1H_2O, (ii) 1·5 H_2O एवं (iii) 0·5 H_2O के संगत होती है। द्वितीय चरण में भार घटने की गति अपेक्षाकृत तीव्र होती है। तीनों यौगिकों में द्वितीय चरण का प्रारम्भ क्रमश: (i) 300°, (ii) 260° व (iii) 160° से होता है। इससे यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि इन जलाणुओं की अपेक्षा अन्य जलाणु प्रबलत: बंधित है तथा ये जलाणु उपसहसंयोजित नहीं हैं। अत: संकुलों को सारणी (2) में प्रदत्त सूत्रों से प्रदर्शित किया जा सकता है।

इस प्रकार ताम्र (II) आयन की उपसहसंयोजकता छ: होती है क्योंकि फिने और o-CA/m-CA/HNA दोनों ही द्विदन्ती कीलेट बनाते हैं एवं दो जलाणु भी उपसहसंयोजित होते हैं।

तीनों संकुलों से प्राप्त अवशेषों के भार ताम्र आक्साइड के लिए अपेक्षित भार से अधिक आते हैं परन्तु ताम्र कार्बोनेट की तुलना में कम हैं अत: ताम्र के कुछ अन्य यौगिकों के समान[7] यहाँ भी अवशेष ताम्र आक्साइड व ताम्र कार्बोनेट का मिश्रण प्रतीत होता है।

सारणी 2

संकुलों के सूत्र, चुम्बकीय आघूर्ण एवं 10 Dq मान

क्र०	सूत्र	μeff(BM)	10Dq(kK)
(i)	$[Cu.Phen.(o\text{-}CA)\,(H_2O)_2]$ 1 H_2O	1·98	12·70
(ii)	$[Cu.Phen.(m-CA)\,(H_2O)_2]$ 1·5 H_2O	1·88	12·41
(iii)	$[Cu.Phen.(HNA)(H_2O)_2]$ 0·5 H_2O	1·85	11·67

चुम्बकीय आघूर्ण : तीनों संकुलों के लिए ~25° पर ज्ञात किये गये चुम्बकीय आघूर्णों के मान (सारणी 2) ताम्र (II) यौगिकों के लिए सामान्यत: अपेक्षित परास (1·8-2·2BM) के अन्तर्गत आते हैं और चुम्बकीय दृष्टि से विरल या पारस्परिक क्रियारहित कापर निकाय के द्योतक हैं।

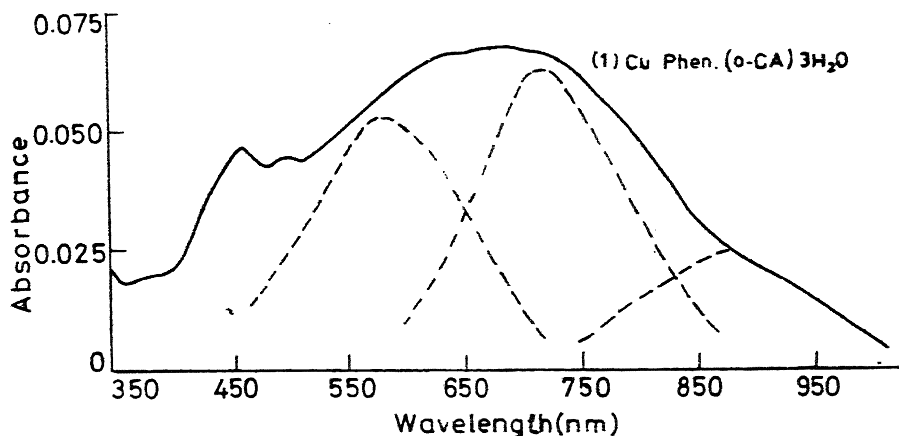
इलेक्ट्रानिक वर्णक्रम : सभी संकुलों के इलेक्ट्रानिक वर्णक्रम (चित्र-1) 500-1000 नैनोमीटर क्षेत्र में एक विस्तृत असममित बैंड से युक्त हैं, जो कि ताम्र (II) के लिए विरूपित अष्टफलकीय ज्यामिति का प्रतीक समझा जाता है । वक्र विश्लेषण की विधि [8] द्वारा प्रत्येक वक्र मे तीन बैंड σ_1, σ_2 व σ_3 प्राप्त किये गये और इनसे उक्त विन्यास के निम्न संक्रमणों को निर्दिष्ट किया जा सकता है ।

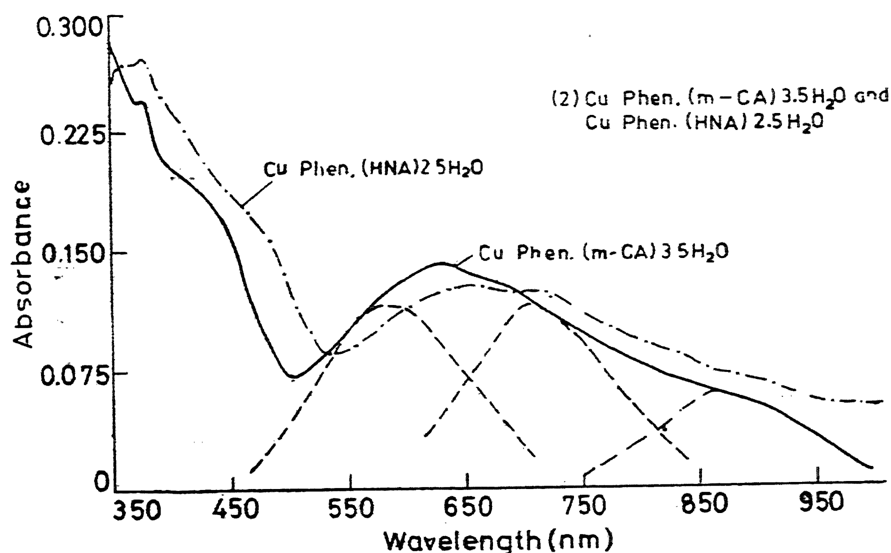
$$\sigma_1 = d_{x^2-y^2} \rightarrow d_{xz}, d_{yz}$$

$$\sigma_2 = \quad \rightarrow d_{xy}$$

और

$$\sigma_3 = \quad \rightarrow d_{z^2}$$





चित्र (1) मिश्र संलग्नी ताम्र (II) संकुलों के दृश्य प्रकाश परावर्तकता वर्णक्रम

उपरोक्त संक्रमण ऊर्जाओं के लिए ओवेन [9] द्वारा दिये गये ऊर्जा व्यंजकों का प्रयोग करते हुए प्रत्येक संकुल के लिए 10Dq का मान प्राप्त किया गया (सारणी 2)। यद्यपि वक्र विश्लेषण विधि और फलतः 10Dq के मान अत्यन्त उच्च कोटि की परिशुद्धता वाले नहीं हैं, तो भी यह कहना उचित होगा कि 10Dq के मान परिणाम की दृष्टि से निम्न क्रम में हैं :



Cu – Phen – (o-CA) > Cu – Phen (m-CA) > Cu – Phen (HNA)

जैसे कि सारणी (2) से प्रत्यक्ष है कि प्रत्येक संकुल में तीन प्रकार के संलग्नी उपसहसंयोजित हैं—फिने, o-CA/m-CA/HNA और जलाणु। इस प्रकार इन तीनों में से दो–फिने और जलाणु, तीनों संकुलों में समान रूप से होने से माध्यवातावरण नियमानुसार[10] यह निष्कर्ष निकलता है कि o-CA, m-CA व HNA के लिए संलग्नी क्षेत्र प्रबलताओं का क्रम निम्नलिखित प्रकार होगा :



o-CA > m-CA > HNA

इलेक्ट्रान चक्रण अनुनाद वर्णक्रम : चूर्ण अवस्था में सामान्य ताप पर प्राप्त इलेक्टान चक्रण अनुनाद वर्णक्रमों (चित्र-2) के अध्ययन से प्राप्त परिणाम सारणी (3) में संकलित किये गये हैं। तीनों esr वक्रों की रेखाआकृति प्रसामान्यीकरण आलेख विधि [11] द्वारा निर्धारित की गयी तथा प्रत्येक वक्र के लिए लारेंत्जियन प्रकृति की पाई गयी। यौगिकों की रेखा विस्तृत में मूल यौगिक $Cu\ SO_4 . 5H_2O$ (57·76) [12] का अपेक्षा वृद्धि दृष्टिगोचर होती है।

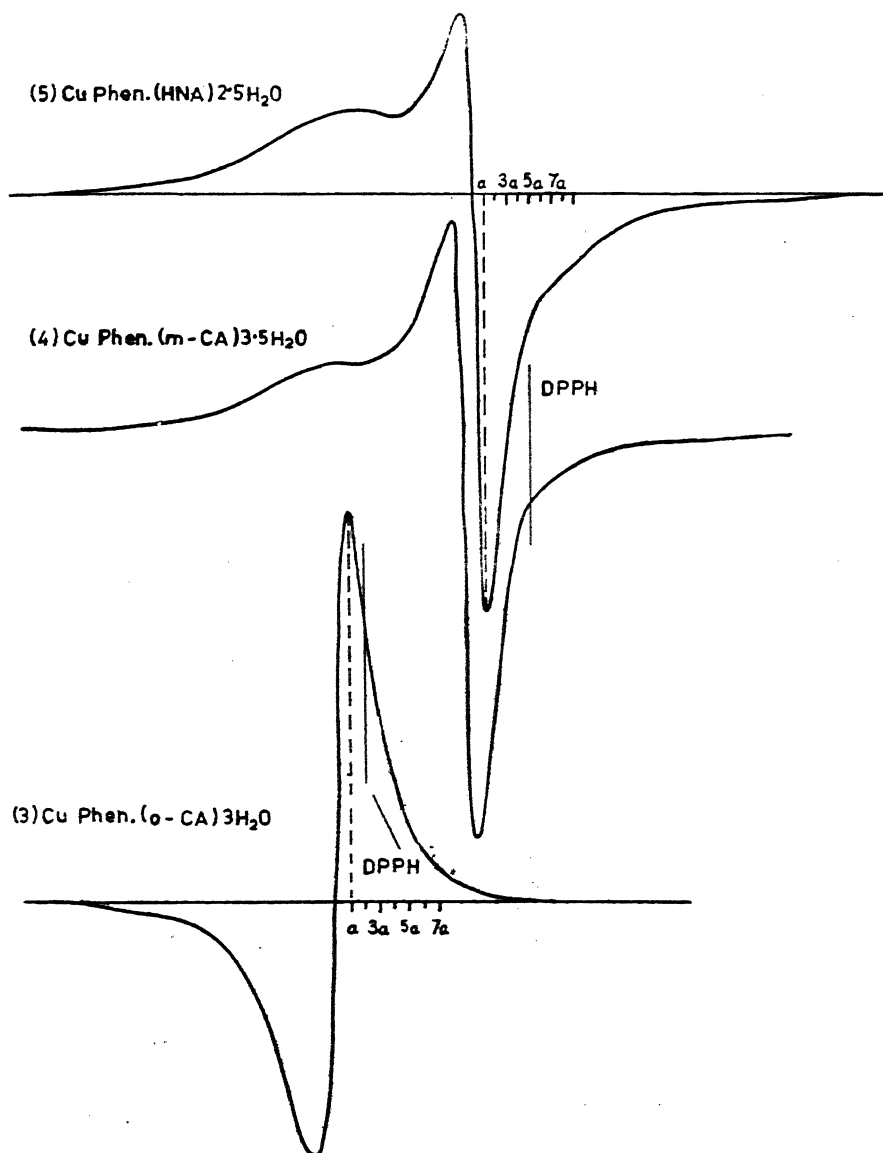
प्रस्तुत तीनों esr वर्णक्रमों में से एक (i) तो समदैशिक हैं तथा अन्य दो विषमदैशिक। अनेकों ताम्र (II) संकुलों के अध्ययन[13,14,15] से यह पाया गया है कि विषमदैशिक वर्णक्रम संकुलों में पर्याप्त परिमाण के निम्न सममिति तत्वों की उपस्थिति को सूचित करते हैं।

सारणी 3

संकुलों के अध्ययन से प्राप्त परिणाम

संकुल क्र०	रेखा आकृति	रेखा विस्तृति G	$g_\perp$	$g_{\parallel}$	g_{av}	x_g सैद्धा० (10^6.cgs)	xq प्रायो० (10^6.cgs)
(i)	लारेंत्जियन	178·6	2·0422	2·1587	2·0819	3·098	3·757
(ii)	लारेंत्जियन	221·1	2·0507	2·2131	2·1104	3·122	3·286
(iii)	लारेंत्जियन	198·7	2·0606	2·1984	2·1077	2·996	3·060

$g_\perp$ व $g_{\parallel}$ के आपेक्षिक मान एक एकाकी इलेक्ट्रान युक्त ($d_{x^2-y^2}$) कक्षक वाली के आद्य अवस्था के परिचायक हैं, जो कि इलेक्ट्रानिक वर्णक्रमकीय परिणामों के अनुरूप ही है। साथ ही g_{av} के मान मुक्त इलेक्ट्रान मान 2·0023 से कुछ अधिक हैं। यह वृद्धि चक्रण कक्षा युग्मन प्रभाव के फलस्वरूप परिणामी



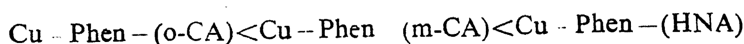
चित्र (2) ताम्र (II) संकुलों के esr वर्णक्रम

कक्षकीय चुम्बकीय आघूर्ण के कारण होती है। चतुष्कोणीयतः विरूपित क्षेत्र में ताम्र (II) के संदर्भ में $g_{\perp}$ व $g_{||}$ के लिए निम्न व्यंजक प्राप्त किये गये हैं [16] :

$$g_{\perp}=2-2\lambda/E_{(dxz,\ dyz-dx^2-y^2)}$$
$$g_{||}=2-8\lambda/E_{(dxy-dx^2-y^2)}$$

जहाँ λ चक्रण कक्षा युग्मन स्थिरांक एवं E निर्दिष्ट संक्रमण की ऊर्जा को व्यक्त करता है। ये संक्रमण ऊर्जाएं संकुल के इलेक्ट्रानिक वर्णक्रम से प्राप्त की जा सकती हैं।

उपरोक्त समीकरणों से गणना द्वारा यह पाया गया कि प्रत्येक समीकरण से प्राप्त λ के मान विभिन्न होते हैं। दोनों से प्राप्त मानों को क्रमशः $\lambda_{\perp}$ व $\lambda_{||}$ से प्रदर्शित करते हुए सारणी (4) में दिया गया है। यह विभिन्नता की दिशात्मक निर्भरता प्रकट करती है [16]। इससे यह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि अन्तर $(\lambda_{\perp}-\lambda_{||})$ विभिन्न संकुलों में λ की दिशात्मक निर्भरता का परिमाण प्रस्तुत करता है। इस आधार पर λ की दिशात्मक निर्भरता का क्रम निम्नवत् होता है :



Cu - Phen - (o-CA) < Cu - Phen (m-CA) < Cu - Phen - (HNA)

जब इस क्रम की तुलना इन संकुलों के 10 Dq मानों के क्रम से की जाती है तो ज्ञात होता है कि ये दोनों एक दूसरे के व्युत्क्रम हैं अर्थात् प्रबलतम संलग्नी o-CA के संकुल में λ की दिशात्मक निर्भरता न्यूनतम है जबकि दुर्बलतम संलग्नी HNA युक्त संकुल में यह सर्वाधिक है। अन्य दो संलग्नी फिने एवं जलाणु तीनों संकुलों में समानरूप से हैं, अतः यह कहा जा सकता है कि $(Phen+H_2O)$ संलग्नियों से o-CA/m-CA/NHA संलग्नी की संलग्नी क्षेत्र प्रबलता का अन्तर बढ़ने के साथ दिशात्मक निर्भरता बढ़ती है। व्यापक रूप में ऐसा कह सकते हैं कि मिश्र संलग्नी संकुलों में विभिन्न संलग्नियों की क्षेत्र प्रबलताओं का अन्तर-बन्धों की दिशात्मक निर्भरता को निर्धारित करता है।

सारणी 4

चक्रण कक्षा युग्मन स्थिरांक सम्बन्धी परिणाम

संकुल क्र०	$\lambda_{\perp}$	$\lambda_{||}$	$(\lambda_{\perp}-\lambda_{||})$	λ_{av}	k
(i)	−364	−278	88	−321	0·62
(ii)	−506	−374	132	−440	0·73
(iii)	−489	−339	150	−414	0·71

सारणी 4 में न्यूनीकरण गुणक (reduction factor) k के मान भी दिये गये हैं, जो कि समीकरण

$$\lambda_0=-828=k^2\lambda$$

द्वारा प्राप्त किये गये हैं। यहाँ λ_0 मुक्त ताम्र (II) आयन के लिये प्रयुक्त किया गया है।

k, धातु इलेक्ट्रानों के संलग्नी कक्षकों में विस्थानीकरण का एक मापदंड है [10],

तथा k_2 को सहसंयोजकता गुणक कहा जाता है। शून्य विस्थानीकरण के लिये k का मान 'एक' (इकाई) होता है तथा सामान्यतः यह संकुलों में एक से कम ही होता है। आणविक कक्षक वर्णन के अनुसार λ के मान में मुक्त आयन मान की अपेक्षा होने वाला ह्रास धातु एवं संलग्नी कक्षकों के मिश्रण के परिणाम को प्रदर्शित करता है। इस प्रकार स्पष्टतः यह कहा जा सकता है कि न्यूनतम सहसंयोजकता अथवा इलेक्ट्रानों का न्यूनतम विस्थानीकरण या सर्वाधिक आयनिक गुण Cu—Phen—(m-CA) संकुल में विद्यमान है, जबकि सर्वाधिक सहसंयोजकता अथवा इलेक्ट्रानों का सर्वाधिक विस्थानीकरण या न्यूनतम आयनिक गुण Cu—Phen—(o-CA) में पाया जाता है।

ग्राम चुम्बकीय प्रवृत्ति x_g का सैद्धान्तिक परिकलन निम्नलिखित चक्रण मात्र व्यंजक [17]

$$x_g \text{ सैद्धा} = \frac{N}{M} g^2 \beta^2 S(S+1)/3kT$$

जहां कि प्रतीक अपने सामान्य अर्थों में प्रयुक्त किये गये हैं, को प्रयोग करते हुए किया गया। परिणामों (सारणी 3) से यह ज्ञात होता है कि परिकलित मान सामान्यतः प्रायोगिक मानों की अपेक्षा कम है, तथा यह अन्तर Cu— Phen—(HNA) के लिये न्यूनतम है। संकुलों (ii) व (iii) के लिये परिकलित मान प्रायोगिक मानों के पर्याप्त निकट है। ये परिणाम गुणात्मक दृष्टि से उचित दिशा में है। इसी प्रकार के परिणाम शर्मा [18] द्वारा भी प्राप्त किये गये हैं। सम्भवतः परिकलित मानों की न्यूनता का कारण यह है कि उपरोक्त व्यंजक में कक्षीय योगदान को सम्मिलित नहीं किया गया है [17]।

निर्देश

1. द्विवेदी, के०, अग्रवाल, बी० के०, चन्द्र, एम० तथा दे, ए० के०, **जर्न० इंडियन केमि० सोसा०**, 1977, **54**, 474, द्विवेदी, के०, चन्द्र एम० तथा दे, ए० के०, **ट्रांजी० मेटल केमि०**, 1977, 2, 186; दत्त, पी० के० , चन्द्र, एम० तथा दे, ए०, के०, **इंडियन जर्न० केमि०** (प्रेषित)
2. अग्रवाल, बी०, अग्रवाल, बी० वी० तथा दे, ए० के०, **अप्रकाशित कार्य**
3. हाकिन्स, टी० आर०, वाल्टर, जे० एल०, हेरिस, ओ० ई० तथा फ्राइजर, एच०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1956, **78**, 263
4. पटेल, एम०एन०, पटेल, सी० बी० तथा पटेल, आर० पी०, **जर्न० इनार्गे० न्यू० केमि०**, 1974, **36**, 3868
5. बुश, डी० एच० तथा बेलर, जे० सी० जू, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1956, **78**, 1137
6. इन्सकीप, आर० जी०, **जर्न० इनार्गे० न्यू० केमि०**, 1962, **24**, 763
7. डयूवल, सी० "इनार्गेनिक थर्मोग्रेविमीट्रिक एनालिसिस" एलसवियर, एम्सटर्डम, 1963
8. यारगेन्सन, सी० के० "एब्साप्र्सन स्पेक्ट्रा एण्ड केमिकल बोंडिंग इन काम्प्लेक्सेस" पर्गमन प्रेस, न्यूयार्क, 1962

9. ओवेन, जे०, **प्रोसी० राय० सोसा०** (लन्दन), 1955, **A 227**, 183

10. फिगिस, बी० एन०, "इन्ट्रोडक्शन टु लिगेंड फील्ड्स" वाइले ईस्टर्न, नई दिल्ली, 1976

11. हाइडे, जे० एस०, प्रिन्सिपल्स आन ई० एस० आर० इ० स्ट्रूमेंटेशन, पांचवी, वेरियन एम० आर० ई० पी० आर० वर्कशाप, पोलोऐल्टो, केलिफोर्निया, 1961

12. शर्मा, एस०डी०, गुप्ता, एस०के० तथा मिश्रा, बी० एन०, **जर्न० मैग्नेटिक रेजोनेन्स** 1974, **16**, 193

13. बीउ, एम० जे०, हाथावे, बी० जे० तथा फैराडे, आर० जे०, **जर्न० केमि० सोसा०**, A 1972, 1232

14. बी० जे० हाथावे, **जर्न० केमि० सोसा० डाल्टन**, 1972, 1196

15. नेभुल, एफ० के०, **जर्न० केमि० फिजि०**, 1960, **33**, 1074

16. हाथावे, बी० जे०, "ऐसेज इन केमिस्ट्री" खंड 2, जे० एन० मिलार्ड, तथा हडसन आर० एफ० (संपा०), एकेडेमिक प्रेस लंदन, 1971

17. ग्रिफिथ, जे०एस० "दी थ्योरी आफ ट्रान्जीशन मेटल आयन्स" केम्ब्रिज युनिवर्सिटी प्रेस, न्यूयार्क, 1961

18. शर्मा, एस० डी०, डॉक्टरल थिसिस, इलाहाबाद यूनिवर्सिटी, 1973

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 2, April 1980, Pages 183-186

लोह तथा मैंगनीज की उपलब्धि पर Cu-P अन्योन्य क्रिया का प्रभाव

शिवगोपाल मिश्र तथा आर० एस० द्विवेदी
कृषि रसायन अनुभाग, रसायन विभाग,
इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त–फरवरी 1, 1979]

सारांश

लाल मिट्टी को प्रयोगशाला की दशाओं के अन्तर्गत आर्द्रन तथा शुष्कन चक्र का अनुसरण करते हुये Fe तथा Mn की उपलब्धि पर Cu–P अन्योन्य क्रिया का प्रभाव देखा गया। यह देखा गया कि Cu तथा P की उच्च मात्रा डालने पर Mn की उपलब्धि बढ़ती है किन्तु Fe की उपलब्धि पर विशेष प्रभाव नहीं पड़ता। ग्लुकोस की उपस्थिति में भी Fe तथा Mn की उपलब्धि का अध्ययन किया गया।

Abstract

Effect of Cu-P interaction on the availability of iron and manganese : an incubation study. *By* S. G. Misra and R. S. Dwivedi, Agricultural Chemistry Section, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

Effect of Cu-P interaction on the availability of Fe and Mn has been studied by incubating a red soil under alternate wetting and drying cycle under laboratory condition. It has been observed that availability of Mn increased whereas available Fe was not affected much except at high level of Cu along with P. Glucose in combination with Cu $\times$ P treatments increased the availability of Mn whereas the amount of available Fe has not been increased to the significant level except a remarkable increase under Cu treatments in presence of 2% glucose. The increase in the availability of Fe and Mn has been suggested to be due to the formation of soluble phosphates of manganese and a chelating and reducing effect of glucose under wetting-drying cycle on native Fe and Mn.

प्रस्तुत अध्ययन लाल मिट्टी को क्रम से भिगोने तथा सुखाने पर उसमें निहित Fe तथा Mn की उपलब्धि पर Cu—P अन्योन्य क्रिया का प्रभाव ज्ञात करने की दृष्टि से सम्पन्न किया गया। इन परिस्थितियों में कार्बनिक पदार्थ की भूमिका स्पष्ट करने के लिये ग्लुकोस को मिट्टी में डाला गया।

प्रयोगात्मक

प्रयुक्त लाल मिट्टी ताम्र-न्यून और P के साथ उच्च अनुक्रिया प्रदर्शित करती है (सारणी-1)। इसे मेजा तहसील के अन्तर्गत बशहरा ग्राम से एकत्र किया गया। मिट्टी के नमूने को सुखाकर चूर्ण करके संग्रह कर लिया गया। फिर प्रयोग के लिये 100 ग्राम नमूना 500 मिली० के कार्निंग बीकरों में लिया गया और विआयनित जल से नम किया गया।

प्रयोग तीन श्रेणियां में विभक्त था। प्रथम श्रेणी में Cu तथा P के चार स्तर (0, 10, 25 तथा 50 ppm 'Cu $CuSO_4.5H_2O$ के रूप में तथा 0, 50, 100 तथा 200 ppm P $Ca(H_2PO_4)_2H_2O$ के रूप में) विलयन रूप में मिट्टी में मिलाये गये (Factorial Combination)। इस श्रेणी में ग्लुकोस नहीं लिया गया। प्रत्येक के तीन-तीन प्रयोग किये गये।

द्वितीय तथा तृतीय श्रेणी में उपर्युक्त उपचार तो थे ही, उनके साथ क्रमशः 1% तथा 2% ग्लुकोस भी मिलाया गया।

इस प्रकार से अभिचारित बीकरों को 40° ताप पर एक ओवेन में इनक्यूबेट किया गया और जब पानी सूख जाता तो पुनः मिट्टी नम कर दी जाती। इस प्रकार 60 दिनों के बाद मिट्टी के नमूने विलग करके उनमें उपलब्ध Cu, P, Fe तथा Mn की मात्रायें ज्ञात की गईं। इसके लिये क्रमशः चेंग तथा ब्रे[1] ओल्सन इत्यादि,[2] ओल्सन[3] तथा जैक्सन[4] की विधियाँ प्रयुक्त की गईं। प्राप्त परिणामों का सांख्यिकीय विश्लेषण किया गया। प्राप्त परिणाम सारणी 2 में दिये गये हैं।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 2 से स्पष्ट है कि P डालने से लाल मिट्टी में उपलब्ध P की मात्रा बढ़ी है फलस्वरूप उपलब्ध Cu तथा Fe की मात्राओं में सार्थक ह्रास हुआ है। उदाहरणार्थ ग्लुकोस की अनुपस्थिति में, जब P नहीं डाला जाता तो उपलब्ध Cu का मान 0·35 ppm था जो 200 ppm P मिलाने पर घटकर 0·04 ppm हो गया। इसी प्रकार उपलब्ध Fe की मात्रा 27·25 ppm से घटकर 10·50 ppm हो गई। मिट्टी में Cu तथा Fe की उपलब्धि में ऐसा ह्रास इन धातुओं के किसी अविलेय फास्फेट बनने के कारण ही सम्भव है।

इसके विपरीत उपलब्ध Mn मात्रा में P की वर्धमान मात्रा के कारण वृद्धि देखी जाती है। इसका कारण मैंगनीज फास्फेट का निर्माण है जो अधिक विलेय है। Cu के मिलाने से भी मिट्टी में उपलब्ध Mn की मात्रा में वृद्धि होती है। यद्यपि साथ ही उपलब्ध Fe की मात्रा में भी वृद्धि हुई किन्तु Mn की तुलना में वह कम है और सार्थक स्तर तक नहीं पहुँच पाती। Cu की मात्रा बढ़ाने के साथ ही फास्फोरस की उपलब्धि में सार्थक ह्रास हुआ।

सारणी 1 प्रयुक्त मिट्टी के कुछ भौतिक-रासायनिक गुणधर्म

विशिष्टतायें	संघटन
मृदा प्रकार	लाल मिट्टी
pH	6.5
$CaCO_3$%	0.27
कार्बनिक कार्बन	0.49
उपलब्ध Cu (ppm)	0.25
उपलब्ध Fe (ppm)	13.9
उपलब्ध Mn (ppm)	26.9
उपलब्ध N (ppm)	252.0
बालू %	43.8
सिल्ट %	28.4
मृत्तिका %	27.8

सारणी 2 ग्लुकोस की उपस्थिति में Cu तथा P के कारण Fe, Mn, Cu तथा की उपलब्धि

	उपलब्ध Mn (ppm)			उपलब्ध Fe (ppm)		
	*1	2	3	1	2	3
Cu_0	30.1	60.0	93.6	27.25	29.25	110.0
Cu_{10}	35 5	66.2	102.5	27.75	37.35	114.0
Cu_{25}	39.6	67.0	118.1	28.25	29.25	115.0
Cu_{50}	45.4	97.2	118.	30.75	32 00	116 0
C. D. 5%	10.87	11.02	10.64	—	—	—
P_0	30.1	60.0	93.6	27.25	29.25	110.0
P_{50}	36.0	66.0	103.0	15.75	17.26	19.0
P_{100}	60.0	67.0	108.0	12.25	14.75	19.00
P_{200}	78.0	115.4	132.0	10.50	11.75	15.75
C. D. 5%	10.87	11.02	10.64	9.54	8.37	9.73

	उपलब्ध Cu (ppm)			उपलब्ध P (ppm)		
	*1	2	3	1	2	3
Cu_0	0.35	0.35	0.40	48.0	41.6	40.8
Cu_{10}	0.45	0.45	0.90	46.4	40.0	35.6
Cu_{25}	1.00	1.60	2.55	44.2	37.6	35.0
Cu_{50}	1.05	2.45	3.10	44.05	36.8	34.5
C. D. 5%	0 374	0.340	0.356	7.23	—	7.36
P_0	0.35	0.35	0.40	48.0	41.6	40.8
P_{50}	0.25	0.20	0.15	52.0	44.8	40.0
P_{100}	0.10	0.05	0.05	77.6	72.8	68.0
P_{200}	0.04	0.04	0.04	112.0	100.0	97.6
C. D. 5%		0.340	0.356	7.23	6.96	7.36

* 1=ग्लूकोस रहित, 2=1% ग्लूकोस, 3=2% ग्लूकोस

Cu मिलाने पर उपलब्ध Mn तथा Fe में जो वृद्धि होती है उसका अन्य कारण मिट्टी में सम्पन्न धनायन विनिमय हो सकता है ।

जब मिट्टी में ग्लुकोस डाला जाता है तो इसके कारण मिट्टी में उपलब्ध Fe तथा Mn में निश्चित वृद्धि होती है । इसका कारण यह है कि मिट्टी में ग्लुकोस के विघटन से अनेक कार्बनिक अम्ल बनते हैं जो Fe तथा Mn को विलयनीकरण तथा कीलेटीकरण द्वारा उपलब्ध बनाते हैं । मिट्टी में ग्लुकोस की उपस्थिति में Fe^{+3} तथा Mn^{+4} का अपचयन भी हो सकता है । 2% ग्लुकोस डालने पर उपलब्ध Fe की मात्रा में जो अत्यधिक वृद्धि देखी जाती है उसका एकमात्र कारण अपचयन ही हो सकता है । लेकिन मिट्टी में निहित तथा डाले गये फास्फोरस की उपलब्धि में समान रूप से ह्रास क्योंकर होता है, इसकी व्याख्या ठीक से नहीं की जा सकती । इसके लिये आगे शोध करने की आवश्यकता है ।

निर्देश

1. चेंग, के० एल० तथा ब्रे, आर० एच०, Anal. Chem., 1953, **25**, 655-669.

2. ओल्सेन, एस० आर०, कोल, सी० वी०, वाटानाबे, एफ० एस० तथा डीन, एल० ए०, U. S. D. A. Circ., 1954, **1939**.

3. ओल्सन, आर० वी०, Agronomy, 1965, **9**, 963-73.

4. जैक्सन, एम० एल०, Soil Chemical Analysis, प्रेंटिसहाल, यू० एस० ए०, 1962.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 2, April 1980, Pages 187-191

'फास्फोरस-निकेल' अन्योन्य क्रिया पर संकुलकारकों तथा इनक्यूबेशन अवधि का प्रभाव

शिवगोपाल मिश्र तथा एस० मुरलीधर
कृषि रसायन अनुभाग, रसायन विभाग,
इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त–सितम्बर 1, 1979]

सारांश

फास्फोरस-निकेल अन्योन्य क्रिया का अध्ययन दो संकुलकारकों—आक्सैलिक अम्ल तथा सिट्रिक अम्ल की एकसाथ उपस्थिति में लाल मिट्टी के साथ सम्पन्न किया गया। इसके लिये फास्फोरस तथा निकेल के 4 संयोग चुने गये। यह देखा गया कि मिट्टी में फास्फोरस की मात्रा बढ़ाने से निष्कर्षणीय निकेल की मात्रा बढ़ती है। निकेल की सभी मात्राओं के साथ उपलब्ध फास्फोरस में सार्थक ह्रास होता है।

Abstract

Influence of complexants and period of incubation on "Phosphorus-Nickel" interaction. *By* S. G. Misra and S. Muralidhar, Agricultural Chemistry Section, Department of Chemistry, University of Allahabad.

Phosphorus-nickel interaction has been studied in presence of two complexants viz. oxalic and citric acids jointly by incubating red soil in beakers involving factorial combination of 4 levels of phosphorus and nickel. Increasing doses of P to soil showed an increase in extractable Ni. There is a significant decrease in available P due to addition of Ni at all levels.

यद्यपि मृदाओं में निकेल को अनिवार्य सूक्ष्ममात्रिक तत्व के रूप में स्वीकार नहीं किया जा सका है किन्तु राबिन्सन इत्यादि[1] ने यह सूचित किया है कि यदि बालू-संवर्ध में 50 ppm निकेल हो तो पादप वृद्धि होती है लेकिन इससे अधिक मात्रायें विषालु होती हैं। पाण्डेय[2] ने मिट्टियों में निकेल की उपलब्धि पर अनेक कारकों यथा फास्फेट, संकुलकारकों को मिलाने का अध्ययन किया है।

प्रस्तुत इनक्यूबेशन अध्ययन पिछले कार्य का विस्तार स्वरूप है और इस दृष्टि से किया गया है कि फास्फोरस-निकेल अन्योन्य क्रिया पर संकुलकारकों तथा कालावधि की भूमिका स्पष्ट हो सके।

प्रयोगात्मक

इस अध्ययन के लिये एक लाल मिट्टी प्रयुक्त की गई जिसे मेजा के पास से एकत्र किया गया था। 100 ग्राम चूर्णित मिट्टी को 500 मिली॰ के बीकरों में लिया गया और विआयनित जल से सिक्त किया गया। इस प्रयोग को तीन श्रेणियों में व्यवस्थित किया गया। पहली श्रेणी में Ni तथा P के चार स्तरों का संयोजन लिया गया जिसमें P की मात्रायें 0, 50, 100, 200 ppm तथा Ni की 0, 10, 25, 50 ppm रखी गईं। P तथा Ni के स्रोत क्रमशः $Ca(H_2PO_4)_2 . H_2O$ तथा $NiSO_4H_2O$ लिये गये। द्वितीय तथा तृतीय श्रेणियों में उपर्युक्त उपचारों के साथ ही आक्सैलिक अम्ल तथा सिट्रिक अम्ल का संयोग संकुलकारकों की भाँति समान अनुपात में लिया गया। इनकी मात्रायें 25+25 ppm तथा 50+50 ppm थीं। उपचारित मिट्टी के नमूनों को 35° से॰ पर इनक्यूबेट किया गया और इनके सूखने पर जल से सिक्त करने की क्रिया कई बार दुहराई गई। फिर 0, 30 तथा 60 दिनों के बाद नमूने पृथक करके विनिमेय Ni की मात्रा ज्ञात की गई। इसके लिये मिट्टी को उदासीन N अमोनियम ऐसीटेट से निष्कर्षित करके डाइमेथिल ग्लाइआक्सीम विधि से Ni का मापन किया गया।[3] उपलब्ध फास्फोरस का निश्चयन 0·5 M सोडियम बाइकार्बोनेट (ओल्सन की विधि[4]) निष्कर्ष में किया गया। प्राप्त परिणाम सारणी 1-4 में सूचित हैं।

परिणाम तथा विवेचना

संकुलकारकों का प्रभाव : आक्सैलिक अम्ल तथा सिट्रिक अम्ल इन दोनों संकुलकारकों की दोनों मात्राओं में से किसी एक के मिलाने पर मिट्टी की उपलब्ध निकेल में कोई विशेष वृद्धि नहीं देखी जाती जबकि उपलब्ध फास्फोरस में उल्लेखनीय वृद्धि देखी जाती है (सारणी 2)।

इनक्यूबेशन अवधि : ज्यों ज्यों इनक्यूबेशन की अवधि 0 से 60 दिन की ओर अग्रसर होती है त्यों त्यों उपलब्ध फास्फोरस का स्तर स्थिर देखा जाता है जबकि उपलब्धि निकेल की मात्रा में सार्थक ह्रास होता है।

फास्फोरस तथा निकेल के मध्य अन्योन्य क्रिया : सारणी 3 से स्पष्ट है कि फास्फोरस की मात्रा बढ़ाने से उपलब्ध फास्फोरस की मात्रा में वृद्धि होती है किन्तु निकेल मिलाने से सभी स्तरों पर उपलब्ध फास्फोरस की मात्रा में सार्थक ह्रास होता है। फास्फोरस की मात्रा बढ़ाने से निष्कर्षणीय निकेल की मात्रा में सार्थक वृद्धि देखी जाती है (सारणी 4)।

हालस्टेड इत्यादि[5] ने देखा है कि फास्फोरस डालने से उपलब्ध निकेल की मात्रा बढ़ती है। क्रुक तथा इंकसन[6] ने सूचित किया है कि बालू संवर्धों में निकेल-विषालुता की सम्भावनायें अधिक हैं। प्रैट इत्यादि[7] ने सुझाव दिया है कि पी-एच 7·0 से ऊपर जिस प्रकार का Ni—P यौगिक बनता है उससे मिट्टियों में निकेल-विषालुता को घटना ही चाहिये। उन्होंने 4 सप्ताह के बाद $Ni_3(PO_4)_2 . 8H_2O$ जैसा

सारणी 1

पोषकों की उपलब्धि पर इनक्यूबेशन अवधि का प्रभाव

इनक्यूबेशन अवधि (दिन)	उपलब्ध P (ppm)	उपलब्ध Ni (ppm)
10	27.94	6.30
30	27.58	4.46
60	27.17	2.82
S.E.	0.455	0.3596
C.D. at 5%	0.891	0.704

सारणी 2

पोषकों की उपलब्धि पर संकुलकारकों का प्रभाव

संकुलकारकों का स्तर	उपलब्ध P (ppm)	उपलब्ध Ni (ppm)
कोई स्तर नहीं	25.51	4.07
50%	27.17	4.67
100%	30.03	4.85
S.E.	0.455	0.3596
C.D. at 5%	0.891	0.704

सारणी 3

उपलब्ध P (ppm)

	P_0	P_{50}	P_{100}	P_{200}	माध्य
Ni_0	7.21	24.16	62.82	87.07	45.31
Ni_{10}	5.02	20.82	22.87	41.35	22.51
Ni_{25}	3.46	18.66	22.9	44.5	22.88
Ni_{50}	6.13	16.38	16.44	36.33	19.57
माध्य	5.95	20.00	32.00	52.31	

	P	Ni	P×Ni
S.E.	0.70	0.70	1.40
(C.D.) 5%	1.37	1.37	2.74

सारणी 4

उपलब्ध Ni (ppm)

	P_0	P_{50}	P_{100}	P_{200}	माध्य
Ni_0	1.11	2.65	3.6	3.91	2.81
Ni	2.37	2.98	3.78	4.33	3.36
Ni_{25}	3.97	4.13	4.81	5.63	4.63
Ni_{50}	5.91	6.8	8.31	8.22	7.31
माध्य	3.34	4.14	5.12	5.52	

	P	Ni	$P \times Ni$
S.E:	0.492	0.492	0.98
C.D. 5%	0.96	0.96	1.92

एक क्रिस्टलीय उत्पाद को प्रकट होते देखा । इसका निर्माण 2 सप्ताह में पूर्ण हो जाता है । फलस्वरूप समय बीतने के साथ निकेल की विलेयता में ह्रास होता जाता है ।

सारणी 1 तथा 2 में दिये गये परिणामों की विवेचना प्रैट इत्यादि के सुझावों के अनुसार ही की जा सकती है जिसके अनुसार इनक्यूबेशन अवधि बढ़ाने पर मिट्टी में क्रिस्टलीय अविलेय निकेल फास्फेट बनता है । जब निकेल तथा फास्फोरस के साथ मिट्टी में संकुलकारक भी मिलाये जाते हैं तो विलेय फास्फोरस में वृद्धि होती है जिसके कारण मृदा निकेल भी अधिक विलेय हो जाता है । यह भलीभाँति ज्ञात है कि सिट्रिक अम्ल तथा आक्सैलिक अम्ल मृदा में उपलब्ध फास्फोरस को बढ़ाने वाले होते हैं । प्राप्त परिणामों से यह निष्कर्ष निकलता है कि फास्फोरस का स्तर उच्च रहने से निकेल का स्तर निम्न बना रहता है । संकुल-कारक भी अधिक फास्फोरस को विलयित करके वही कार्य करते हैं । अधिक काल तक इनक्यूबेशन के फल-स्वरूप निकेल की विषालुता शायद ही बनी रह पावे ।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखकद्वय में से एक (मुरलीधर) को वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसन्धान परिषद, नई दिल्ली द्वारा जूनियर रिसर्च फेलोशिप के रूप में आर्थिक सहायता प्राप्त हुई जिसके लिये वह आभार प्रकट करता है ।

निर्देश

1. राबिन्सन, डब्लू० ओ०, एडिंगटन, जी० तथा बायर्स, एच०जी०, **यू० एस० डी० ए०टेक्निकल बुलेटिन**, 1935, पृष्ठ 471

2. पाण्डेय, पी० **डी० फिल० थीसिस**, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, 1974

3. सैंडेल, ई० बी०, Colorimetric Determinations of Traces of Elements इन्टरसाइन्स पब्लिकेशन्स, न्यूयार्क 1950

4. ओल्सन, एस० आर०, कोल, सी० वी०, वाटानावे, एफ० एस० तथा डीन, एल० ए०, यू०एस०डी० ए० सरकुलर 939, (1954)

5. हाल्स्टेड, आर० एल०, फिन, बी० जे० तथा मैकवैन्स, ए० जे०, **कनै० जर्न० सॉइल सांइस**, 1969, **49**, 335-342

6. क्रुक, डब्लू० एम० तथा इंकसन, आर० एच० ई०, **प्लांट एंड साइल**, 1955, **6**, 1-15

7. प्रैट, पी० एफ०, पेयर, एफ० एल० तथा मैक्लिन, जी० डब्लू०, **साइल सांइस सोसा० अमे० प्रोसी०**, 1964, **28**, 363-65

लेखकों से निवेदन

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए।

लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कर्यालय में प्रवन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सकेंगे।

प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है, पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—

फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०, **जाइट फिजिक० केमि०**, 1928, **150**, 80।

प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) बिना मूल्य दिये जायँगे। इनके अतिरिक्त यदि और प्रतियाँ लेनी हों, तो लागत मूल्य पर मिल सकेंगी।

लेख **"सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"** इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

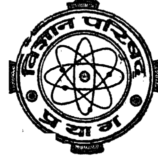
प्रबंध सम्पादक

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr. Sheo Gopal Misra,
M. Sc., D. Phil., F. N. A. Sc.



वार्षिक मूल्य : 8 रु० या 20 शि० या 4 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 2 रु० या 5 शि० या 1 डालर

Annual Rs. 8 *or* 20 sh. *or* $ 4
Per Vol. Rs. 2 *or* 5 sh. *or* $ 1

मुद्रक :
के० राय, प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली एवेन्यू, प्रयाग

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्, प्रयाग
8025

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika

विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

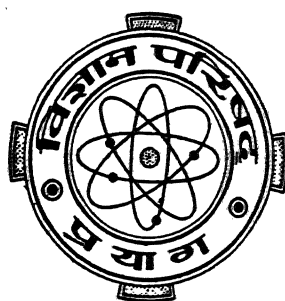
Vol. 23 | July, 1980 | No. 3

स्वामी सत्यप्रकाश सरस्वती की 75 वीं वर्षपूर्ति के उपलक्ष में पुरातात्विक रसायन विशेषांक

In Commemoration of 75th Birth Anniversary of Swami Satya Prakash, Chief Editor Vijnana, Prishad Anusandhan Patrika

SPECIAL NUMBER

Archaeological Chemistry and Archiometry



The Research Journal of the Hindi Science Academy

Vijnana Parishad, Maharshi Dayanand Marg, Allahabad, India

विषय सूची

शुभास्ते पन्थानः


स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती जन्म 24 अगस्त 1905

स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती की 75 वीं वर्षं गांठ पर अनुसन्धान पत्रिका का यह अंक समर्पित करते हुए हर्ष हो रहा है। स्वामीजी इस पत्रिका के जन्मदाता एवं संस्थापक प्रधान सम्पादक हैं। विज्ञान के क्षेत्र में हो रहे शोधकार्य को राष्ट्र भाषा हिन्दी के माध्यम से सबों के समक्ष प्रस्तुत करने की लालसा उनके मन में कब से थी, यह तो मुझे पता नहीं किन्तु जब उन्होंने इसे व्यावहारिक रूप प्रदान किया तभी से उन्होंने मुझे सहभागी बनाया। स्वामीजी का रसायन विज्ञान के क्षेत्र में जो मौलिक अवदान है, वह उनके शोधपत्रों की सूची से (जो आगे दी हुई है) स्पष्ट हो जावेगा। उनका कृतित्व भी कम नहीं है। पार्श्व अभिरुचि के रूप में वे वेदों के अध्ययन में विशेष क्रियाशील रहे हैं।

स्वामी जी ने शोधकार्य का निर्देशन करते हुये भारत की पुरातत्विक सामग्री पर नया कार्य प्रारम्भ कराया। उसी सिलसिले में जब वे विदेश गये तो वे अनेक पुरातत्व प्रेमी रसायनज्ञों से भी मिले।

हमें सन्तोष है कि स्वामी जी की इस अभिरुचि को सबों के समक्ष रखने के उद्देश्य से हमने जिस विशेषांक की योजना की उसमें भारत के मूर्धन्य विशेषज्ञों के साथ ही विदेशी विद्वानों ने सहर्ष सहयोग किया है।

हमने सभी शोधपत्रों को उसी रूप में दिया है किन्तु हमारा प्रमुख उद्देश्य तो हिन्दी में उन शोधपत्रों को प्रकाशित करना था। अतः उनका हिन्दी रूपान्तर भी कर दिया है। अकेले स्वामीजी का शोधपत्र हिन्दी में है।

स्वामी जी को यह अंक समर्पित करते हुये हम उनकी दीर्घायु की कामना करते हैं। वे हमारा शतत मार्ग दर्शन करते रहें

प्रबन्ध सम्पादक

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 3, July, 1980, Pages 193-205

प्रोफेसर (स्वामी) सत्य प्रकाश के प्रकाशित ग्रन्थों और शोध निबन्धों की सूची

(जर्मनी के संदर्भकोश Biographisch-literarisches Handworterbuch, Bd. VII, b-Poggendorff-Redaktion, Leipzig से उदधृत)

An Introduction to Inorganic chemistry: for B. Sc. students of the Indian Universities[1] (Allahabad '34) 4+478. 2. Aufl. unter dem Titel: *Advanced inorganic chemistry* for B. Sc. students (New Delhi '44, '50, '52, '54, '56, '58, '60, '61, '63, '65, '67, '69, '73, '74 (mit G. D. Tuli, S. K. Basu); New Delhi '74) 898 p.

Agnihotra, or an ancient process of fumigation. A study from the chemical standpoint (Delhi '37) 15+199 p.;[2] (New Delhi '74) 101+8 p,

A Eritical Study of Philosophy of Dayananda[1] (Ajmer '38) 3+4+454 p; 2· Aufl. unter dem Titel: *Dayananda's outline of the Vedic Philosophy* (New Delhi '75) 3+224 p.

Humanitarian Diet[1], (Allahabad '41) 187 p.; [2] (Allahabad '77) 224 p.

A textbook of Analytical Chemistry for B. Sc. students (mit R. D. Tiwari.) (Allahabad, '45, '48, '51, '55, '59, '62, '63, 65, '66) 323 p.

Advanced chemical calculations in inorganic, analytical and physical chemistry (mit R. D. Tiwari) (New Delhi '48, '52, '56, '59, '62) 427 p.

Samanya Rasayana Sastra (सामान्य रसायनशास्त्र, Text book of general chemistry for B. Sc. students in Hindi) (Allahabad '51) 1096+24 p.

Advanced Chemistry of Rare Elements[1] (New Delhi '56); [2] (New Delhi '60) 4+665 p; [3] ('66); amerikanische Aafl. (New York '67) 8+808 p, [4] ('75) 889p.

Vaijnanika Vikasa ki Bharatiya Parampara, वैज्ञानिक विकास की भारतीय परम्परा (Ancient traditions of sciences in India): A course of lectures to the Bihar State Academy of Literature, (Patna '54) 2+3+1+268+3 p,

Pracin Bharat men Rasayan ka Vikas, प्राचीन भारत में रसायन का विकास, (Development of chemistry in ancient India) (Lucknow '60) 850 p.

Ultrasonics and Colloids (mit Asim Kumar Ghosh) (Allahabad '61) 142 p. (Uttar Pradesh Scientific Research Committee Monographs, Bombay '62) 142 p.

Chemical Study of some Indian Archaeological Antiquities (mit N. S. Rawat) (Bombay-New Delhi-Newyork '65) 85 p. (Uttar Pradesh State Council of Scientific and Industrial Research Monograph 10)

Founders of sciences in ancient India (New Delhi '65) 2+6+6+675 p.; Hindi translation (New Delhi '67) 2+4+5+4+612+17+8+8 p.

Satapatha Brahmanam, शतपथ ब्राह्मणम् (Hundred Paths-Ancient Vedic Treatise of the school of Sukla Yajurveda) (New Delhi, Vol. I '67: Vol. II '69; Vol. III '70) 8+4+4+727p. of English Introduction; (Sanskrit text and Hindi translation by Ganga Prasad Upadhyaya, 1448 p. (Dr. Ratna Kumari Publication Series 1, 2 and 3) (English introduction, Sanskrit text and Hindi translation)

Baudhayana Sulba-Sutram, बौधायन शुल्बसूत्रम् (Baudhayana's aphorisms on Vedic geometry applied to fire-altars) (New Delhi '68) 2+34+207+8 p, (Dr. Ratna Kumari Publication Series 4) (Text, Sanskrit commentary by Dvarakanatha Yajvan, English translation by G. Thibaut)

Apastamba Sulba-Sutram, आपस्तम्ब शुल्बसूत्रम् (Apastamba's aphorisms on Vedic geometry applied to fire-altars) (New Delhi '68) 2+30+261+119 p.; (Dr. Ratna Kumari Publication Series 5) (English translation by S. Prakash and notes and introduction; Sanskrit text and Sanskrit commentaries by Kapardi, Karavinda and Sundararaja)

A Critical Study of Brahmagupta and his works, a most distinguished Indian astronomer and mathematician, of the sixth century: (New Delhi '68) 22+344 p.

Chemistry for Engineers for University and Technological Institutions (mit S. P. Sangal) (Allahabad '69) 707 p.

Vincit Veritas (collection of lectures on Indian culture and philosophy in South Africa) (Allahabad '71) 331 p.

Standard English Hindi Dictionary (mit Balbhadra Prasad Misra) (Allahabad '71) 49+1573+3 p.

Man and His Religion (Nairobi, Kenya '72) 103 p; Indian reprint New Delhi '73) 96 p; translation in Swahili (Nairobi, Kenya '76) 96 p; Hindi translation (Allahabad '75) 103 p

Sabun aur Glycerine, साबुन और ग्लिसरीन (Soap and Glycerine) (Lucknow '66) 12+495 p.

Rasayanik Shilp ki Ekaka Sankriyayen, रासायनिक शिल्प की एक संक्रियायें (Unit operations of chemical technology in Hindi) (mit Shubha Laxmi) (Lucknow '73) 623+19 p.

Bhautik Rasayan, भौतिक रसायन (Text Book of Physical Chemistry in Hindi) (mit Sheo Prakash) (Lucknow '69) 10+537 p.

The Nectareal Songs of the Vedas (New Delhi '75) 50+1 p.

Patanjala Rajayoga (The ancient system of Yoga introduced by Patanjali) (New Delhi '75) 10+347 p. (Indonesion translation, by Drs, Maijor Polak, Denpasar, '80) 222 -1 p-

Parables and Dialogues from the Upanisads (New Delhi '75) 13+204 p.

Physico-ehemical Aspects of High Polymers (mit Som Prakash Srivastava) (New Delhi '77) 6+222 p (Science Pocket Monograph Series 1)

Bhautik aur Rasayanik Niyatanka, भौतिक और रासायनिक नियतांक, (Tables of Physical and Chemical Constants) (with Usha Jyotismati) (Lucknow '78) 11+314 p.

The Bakhshali Manuscript, on ancient treatise of Indian Arithmetic (with Usha Jyotishmati) (Allahabad '79) 108+71+3 p.

The Sulba Sutras, Texts on the Vedic geometry (with Usha Jyotishmati) (Allahabad '79) 87+156+4 p.

The Rigveda Samhita (Text and English translation with notes) (with Satyakama Vidyalankar); Vol. I, Introduction and Index, New Delhi '77) 270+132 p; Vol. II, Book I, hymns 1-121, '77; Vol. III, Book I, hymns 122-191; '77; Vol. IV, Book II, hymns 1-43; Book III, hymns 1-62, '77; Vol. V-VI, Book IV, hymns 1-58, Book V, hymns 1-87, '87; अबतक 1952 पृष्ठ प्रकाशित

Acustica Ultrasonic studies in sulfosalicylic acid chelates of Cd(II) and Th(IV)[12]: **19** ('67) 98 (102) [m. deutscher und franzos Zusammenfasag.]

——Non-linearity acoustic parameter in higher alkenes [11, 28], **27** ('72) 28-30.

Allahabad University Studies Formation of Inorganic Jellies: **8** ('32)119-54.

——Formation of Organic Jellies I: X ('33) 257-83.

——The theory of Clotting of Blood, 3: The indefinite fluidity of blood in body vessels, and the relation between setting time and syneresis of blood clot: **11** ('35) 431f.

——Nagatively charged sols of ferric tungstater molybdate, arsenate, phosphate and borate [15]: 1943 (chem. sect.) 1-18.

——Ultrasonic waves and chemical systems [17, 10]: 1965 1-21.

——Ultrasonically induced cavitation[17] 23-45.

Biochemische Z. Zur Theorie der Blutgerinnung [, 1]: **249** ('32) 39-47.

Bull. Chem. Soc., Japan. The oxidation of Fe^{2+} by ultrasound [17, 30]: **37** ('64 1404-07.

——Stability of cobalt ferrocyanide sol in ultrasonic field. The ultrasonic dispersion of cobalt ferrocyanide[18, 19]: **38** ('65) 1426-30.

——Relation between ultrasonic velocity and viscosity in aqueous solutions of electrolytes [20, 12], **39** ('66) 2114-16.

Chimie Analyt. Action des ultrasons sur les halogénures organiques. Décomposition ultrasonique d'une solution aqueuse de tétrachloropropane [17] (4) **46** ('64). 607-12.

——L'effect d'ondes utlrasoniques sur un hydrosol de platine [16] (4) **47** ('65) 188-93.

——Ètudes potentiométriques et conductométriques de la stàbilité de L'hydrosal de tellure dans un champ d'ultrasons [19, 18]: (4) 47 ('65) 304-08,

——Décoloration par ultrasons des solutions de bleu de méthyléne [21, 25]: 51 ('69) 263-66.

Current Sci. Temperature of zero conductance of certain dyes [26]: **18** ('49) 403f.

Indian J. Chem. Effect of concentration, bulk and intensity on the sonochemical decomposition of tetrachloroethane [17,9]: **2** ('64) 76-77.

——Relation between ultrasonic velocity and viscosity in aqueous solutions of silver nitrate [33] **2** (64) 499-500.

——Decolorization of Amaranth 0 dye by ultrasonic waves [18,17]: 5 ('67) 3-5.

——Method for calculation of stability constants of complexes from ultrasonic velocity measurememts [12,20]: **6** ('68) 31-33.

——Eletrical and thermal resistivities of copper, silver and gold [27,21]; **13** ('75) 123-28.

Indian J. Physics and Proc. Indian Assoc. Cultivat. Sci. Cryotropic behaviour of some inorganic jellies: **8** ('33/34) 231-42.

——Magnetic study of sols. and gels, I : **8** ('33/34) 243-58.

——Velocity of ultrasonic waves in solutions of electrolytes [32]: **32** ('58) 62-65.

J. Acoust. Soc. America. Kinetics of the decolorization of Congo red under ultrasonic radiation [19]: **32** ('60) 138-40.

J. Colloid and Interface Sci: The influenee of ultrasonic waves on silver hydrosol [7]: **14** ('59) 338-42.

J. Indian Chem. Soc. Abclimatization and ionic antagonism with sheep serum and other colloids [8,4]: **5** ('28) 313-28.

——Changes in viscocity and hydrogen ion concentration of some inorganic substances during the process of jelly formation [4]: **6** ('29) 391-409.

——Preparations of jellies of some inorganic substances [4]: **6** ('29) 587-98.

——Preparation of borate, tungstate, molybdate and other jellies and study of mercurisulfosalicylic acid jellies [4]: 7 ('30) 367-78.

——Influence of the concentration of coagulating electrolyte, time and temperature on the syneresis of some inorganic jellies [4]: 7 ('30) 417-34.

——Preparation and study of some hydroxide jellies[4]: 7 ('30) 591-606.

---Reversal of charge of serum and its coagulation and gelatinization with acids [4] 7 ('30) 723-32.

---Thixotropic behaviour of thorium jellies [2]: **8** ('31) 549-56.

---A note on the relation between coagulation and gelation points of sols: **9** ('32) 137-39.

---Influence of temperature on the setting of inorganic jellies: **9** ('32) 193-202.

---On the stability of lithium urate sols: **10** ('33) 35-39.

---Preparation and proprties of zirconium sulfosalicylic acid jellies: **10** ('33) 281-85.

---Study of inorganic jellies: P. C. Ray volume ('33) 99-106.

---A note on the formation of a ruby-red jelly of zirconium sulfosalicylic acid [1]: **11** ('34) 419-20f.

---On magnetic birefringence in mercurisulfosalicylic acid sols [1]: **11** ('34) 449-54.

---Studies in the negatively charged colloidal solutions of various ferrric salts, 1: negatively charged mixed sol of ferric oxide and ferric vanadate [15]: **23** ('46) 111-16.~2: Negatively charged ferric borate sol [15]: 391-96.~3: Negatively charged mixed sol of ferric oxide and ferric molybdate [15]: 413-19.~4: Negatively charged ferric tungstate sol [15]: 445-50: ~5 Negatlvely charged ferric arsenate sol [15]: **24** ('47) 389-95.

---Hydrogen ion concentration and absorption of nickel acetylacetone [34]: **33** ('56) 761 f.

---Studies in complex formation with colloidal mercurisulfosalicylic acid, 1: Complex beryllium mercurisulfosalicylic acid [29]: **34** ('57) 197-203; ~2: Complex aluminium mercurisulphosalicylate [29]: 807-13; ~3: Uranyl mercurisulfosalicylate [29] 35 ('58) 555-61.

---Complex formation of uranyl ion with *o*-cresotic acid. Potentiometric, colorimetric and conductometric study [34]: 35 ('58) 119-24.

---Composition of cupric *o*-cresotate chelates: a colorimetric study [34] 139-43.

---Preparation of thorium jellies with pyridine bases [3]: **34** ('57) 779.

——Formation of aluminum *o*-cresotate chelate: potentiomertic and conductometric studies [34]: **35** ('58) 445-50.

——Decomposition of organic halogen compounds by ultrasonic waves, 2: Mechanism of the decomposition of methylene dichloride in aqueous solutions [32]: *ibid* 797-803.

——Composition and apparent instability constant of uranyl 1-hydroxy-2-naphthoate chelate [34]: **36** ('59) 19-22.

——The influence of ultrasonic waves on gold hydrosol [7]: *ibid* 396-98.

——Kinetics of the fading of chrysoidine under ultrasonics [19]: *ibid* 601-04.

——The effect of ultrasonic waves on Oden's sulphur sol [16]: *ibid* 696-98.

——Temperature effect on the moleular solution volumes of urea, potassium iodide, potassium, chloride and potassium chromate[26 '9]: **40** ('63) 700-02.

——Inhibition of ultrasonic decomposition of aqueous organic halides in presence of ethanol acetone and dioxan[17]: **41** ('64) 315-18.

——Ultrasonic coagulation of selenium sol in presence of oxygen and in presence of organic substances[18]: **42** ('65) 91-96.

——Stability of nickel ferrocyanide sol in an ultrasonic field: sonodispersion of nickel ferrocyanide[18 '19]: **44** ('67) 508-12.

J. Physic. and Colloid Chem. Ultrasonic studies of thorium phosphate jellies at different temperatures[31 13] **'55** ('51) 1413-17.

J. Physic. Chem. Coagulation of blood and milk by electrolytes and the similarity between the clotting of blood and the formation of jellies.[4]: 33 ('29) 459-66.

——Influence of temperature on the coagulation of sols, and the problem of acclimatization of animals[4]; **34** ('30) 954-62.

——Influence of electrolytes on the syneresis and clotting of blood[4]: **35** ('31) 629-37.

——Variations in extinction coefficients during the course of jelly formation; **36** ('32) 2483-2496.

——Conductivity measurements of thorium and other jelly-forming systems: **37** ('33) 907-16.

——Temperatures of zeroconductance and infinite viscosity of some negatively charged colloidal systems[15]: **50** ('46) 251-56.

——Structural study of the complex barium citrate by ultrasonic waves[9,17]: **68** ('64) 3078-8.

——Structural studies of chelates by ultrasonic waves[20]; **70** ('66) 3325--29.

J. Prakt. Chem. Kinetics and mechanism of sonochemical decomposition of aqueous bromoform solution[17,30]: (4) **26** ('64) 140-46.

J. Sci. and Industr. Res. Sec. B Relationships between ultrasonic velocity, compressibilities and certain thermodynamic functions[17]: **21** ('62) 593-95,

—— Chemlcal reactions induced or catalysed by ultrasonic waves: Decolorization of dyes by ultrasonic waves[19]: **24** ('65) 629-30f.

Kolloid-Z. Ueber grenzflachengebundenes und Strukturmasig gebundenes Wasser in anorganischen Gallerten: **60** ('32) 184-91.

——Bemerkung über die Bildung von Spiralringen in trocknenden Gelen[8]: **63** ('33) 315.

- —Über die Kontinuität der Phasen wäherend der Sol-Gel Umwandlung: **64** ('33) 293-300.

——Die Theorie der Blutgerinnung, 2: **65** ('33) 88-92.

——Viskositätsänderungen an gelbilden den Solen in Abhängigkeit von Zeit und Elektrolytkonzentration[24]: **121** ('51) 147-51.

——Viskosität und Kinetik bei der Bildung einiger anorgenischer Gele (Kinetik der Sol-Gel-Transformation)[24]: **128** ('52) 15-18.

——Untersuchungen über kolloidale Sulfosalicylsaure, 1: Komplexbildung mit dreiwertigem Eisen[29]: **142** ('55) 24-27 [m. engl. Zurammenfassung.]

——Über Einfluss von Neutralsalzen auf did Letfahigkeit des Quecksilber (II) sulfosalicylsäuresolz[29]: **133** ('53) 38f.

——A note on the influence of ultrasonic waves on the conductivity of colloidal solutions[7]: **151** ('57) 72f.

——The influence of ultrasonic waves on the hydrogen ion concentration and the stability of colloidal solutions[7]: **158** ('58) 33-35 [m. deutscher Zusammenfassung].

——Preparation of Zirconium jellies with a pyridine base[3]: **158** ('58) 130f.

——The influence of ultrasonic waves on the viscosity of ceric hydroxide sol[7]: **160** ('58) 33-35 [m. deutscher Zusammenfassnug].

——The influence of ultrasonic waves on the viscosity and stability of vanadium pentoxide sol[16]: **167** ('59) 39-41 [~].

——Decolourisation of Brilliant Green under ultrasonic radiations[19]: **175** ('61) 50-53. [~].

——The influence of ultrasonic waves on manganese dioxide sol[16]: **175** ('61) 56-58 [~].

——Influence of ultrasonic waves on cobaltous hydroxide sol[16]: **181** ('62) 46-49 [~].

——Ultrasonic decolorization of Safranine-0[19]: **187** ('63) 53-56 [~].

——Ultrasonic decolorization of Bromocresol green[19]: **188** ('63) 59-61 [~].

——The influence of ultrasonic waves on manganese dioxide sol in the atmosphere of nitrogen[18]: **188** ('63) 136-38 [~].

——Influence of ultrasonic waves on tellurium hydrosol[16]: **190** ('63) 60-62 [~].

——The influence of ultrasonic waves on selenium hydrosol[16]: **190** ('63} 135-38 [~].

Nature [London] Preparation of ferric succinate jellies[15]: **163** ('49) 878.

——Ultrasonic velocity in potassium chloride solutions in the region of their negative viscosities[24,31]: **168** ('51) 522f.

——Inhibition of ultrasonic decolorization of Rhodamine *B* in presence of organic substances[19]: **191** ('61) 1292.

Naturwissenschaften Structural studies of complexes by ultrasonic waves[9, 17]: **52** ('65) 11f.

Proc. Indian Acad. Sci. Seck A. On non-spherical nature of colloidal particles in relation to the formation of jelly structure: **4** ('36) 332-44.

——Kinetics of sol-gel transformation, 3: The influence of temperature on the setting of some inorganic jellies[6]: **11** ('40) 318-40; ~4: Influence of purity of the sol on the setting of ferric arsenate and ferric phosphate jellies[6]; 331-46; ~5: Influence of different coagulating electrolytes on the setting of ferric phosphate gel[6]: **14** ('41) 577-83.

——Studies in blue perchromic acid 1: Kinetics of the decomposition of the blue perchromic acid in various organic media[22]: **18** ('43) 1-7.

Proc. Nation. Acad. Sci., India. On the compositions of the negatively and positively charged colloidal solutions of various ferric salts and their dependence on the dissociation constants of their polybasic acids[15]: **15** ('46) 73-81.

Talanta Ultrasonic study of the chelate of chrome azurol *S* with aluminium[16, 17]: **11** ('64) 1113-20.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika Conductometric and colorimetric study of the complexes formed from uranyl nitrate and 1-hydroxy-2-naphthoic acid[34]:: **1** ('58) 1-11.

——Diffusion of potassium chloride through ferric arsenate gels[16]: **1** ('58) 183-90.

——The influence of ultrasonic waves on chromium hydroxide sols[7]: **2** ('59) 15-27.

——Decomposition of pyridine, 2-aminopyridine and quinoline by ultrasonic waves[3]: **2** ('(59) 141-46.

——The influence of ultrasonic waves on prussian blue, copper ferrocyanide and uranium ferrocyanide sols[7]: **2** ('59) 219-24.

——Study of the kinetics of the decolorization of aniline blue under ultrasonic waves[19]: **3** ('60) 31-34.

——Influence of ultrasonic waves on tungstic acid sol[16]: 3 ('60) 79-85.

——Chemical composition of ancient copper and bronze found in Kausambi archaeological excavations[23]: 3 ('60) 173-79.

——Composition of uranyl 1-naphtho-2-sulfonate chelate. A colorimetric study: 3 ('60) 241-47.

——Callendar's gas equation and compressibility[17]: 4 ('61) 5-10.

——Chemical study of ancient plasters found at Kausambi[23]: 4 ('61) 23-30.

——Compressibilities from the van der waals equation[17]: 4 ('61) 87-91.

——Redox processes in ultrasonic field, 1: Decolorization of dyes[19]: 4 ('61) 319-25; ~2 : Oxidation of colloids[16]: 4 ('61) 327-34.

——Corrosion products of ancient bronzes and coppers of Kausambi[23]: 5 ('62) 61-72.

——Sonochemical reactions in presence of nitrogen atmosphere[17]: 5 ('62) 123-29.

——Fffect of ultrasonic intersity an Sono-chemical reactions, [17]: 5 ('62) 157-64.

——Decomposition of tetrachloroethane by ultrasonic waves[17, 30]: 6 ('63) 169-77.

——Einfluss von Ultraschallwellen auf Schwefelsol in Abwesenheit Von Sauerstoff[18] 7 ('64) 1-6 [in Hindi m. engl. Zussamenfassg.]

——Einfluss der Temperatur auf das molare Losungevolumen-eine theoretische Uberlegung[17, 9]: 7 ('64) 7-12 [~].

——Einfluss von Ultraschallwellen auf Chromhydroxid Sol in Abwesenheit von Sauerstoff[18]: 7 ('64) 71-76 [~].

——Ultrasonic velocity in aqueous solution of thorium nitrate[33, 12]: 7 ('64) 117-21 [~].

——Effect of ultrasonic waves on aqueous solutions of organic compounds, 1: Tetrabromoethane[21, 19]: 9 ('66) 109-15 [~].

Z. Anorg. u. Allgem. Chem. Eifluss organischer Stoffe auf die Bildung der Gallerten des Arsenate, Phosphats und Molybdats von Thorium; **201** ('31) 301-13.

——Einfluss verschiedener Stoffe auf die Peptisation von ferriarsenate, phosphat, wolframat und-molybdat durch Ferrichlorid[35]; **205** ('32) 241-50.

——Kinetic der Sol-Gel Umwandlung. 1: Beziehung zwischen Konzentration des KoagulierendenElcktrolyten und der Erstarungszeit der Gallerte[6]: **208** ('32) 16368.

——Herstellung und Eigenschaften von Gallerten der Zirkonsulfosalicylsäure: **215** ('33) 249-54.

——Magnetische Untersuchungen an anlöslichen amorphen Stoffen, 1: Magsnetische Suszeptibilität verschiedener Eisensalze[1]: **217** ('34) 27-32.

——Uber das Zersetzungsprodukt des blauen Chromperoxyds[22]:' **275** ('54) 94-97.

Z. physik. Chem. [Frankfurt/*M.*] Ultrasonic studies in electrolytic mixtures[33, 19]: **50** ('66) 113-19.

——Structural studies of EDTA-metal chelates by ultrasonic waves, 1: Chelates with cadmium and mercury[12]: **55** ('67) 259-67; ~2: Chelates with zinc and strontium[12, 20]: **61** ('68) 247-52.

Z. Physik. Chem. [Leipzig] Decomposition of organic halogen compounds by ultrasonic waves, 1: Mechanism of the decomposition of carbon tetrachloride in the presence of water[32] **208** ('58) 127-30.

——Composition of uranyl 0-cresotate complex. A colorimetric study[34]: **208** ('58) 181-87.

——Composition of ferric 0-crasotate, A spectrophotometric study[34]: **209** ('58) 326-34.

——Ultrasonic decolorization of rhodamine B[19]: **221** ('62) 145-52.

——Effect of certain organic liquids on the sonochemical decomposition of bromoform.[17 19]: **228** ('65) 272-76.

——Structural study of the complex lead citrate by ultrasonic waves[9]: **229** ('65) 295-98.

——Ultrasonic studies in chelate forming systems, 1: Zirconium oxychloride-catechol chelate[33]: **231** ('66) 310-14.~2: Barium chelate of E. D. T. A. (ethylenediaminotetraacetic acid)[12]: **236** ('67) 59-63.

——Ultrasonic studies in eletrolytic mixtures.[33, 19], **50** ('66) 3/4, 113-119.

Zbl. Bakt. Microbial fixation of nitrogen in presence of lanthanum sulpate with sodium molybdate[36, 37] ('78) 632-37.

mit 1. L. N. Bhargava; 2. N. N. Biswas; 3. Y. N. Chaturvedi; 4. N. R. Dhar; 5. A. Dhari; 6. H. L. Dube; 7. A. K. Ghosh; 8. S. Ghosh; 9. F. M. Ichhaporia; 10. Km. S. L. Kapur; 11. S. K. Kor; 12. Sh. Laxmi; 13. V. Mehra; 14. H. H. Misra; 15. S. P. Mushran; 16. A. D. Pandc; 17. J. D. Pande; 18. O. Prakash; 19. Sh. Prakash;; 20. Som Prakash; 21. B. Prasad; 22. R. C. Rai; 23. N. S. Rawat; 24. P. N. Saxena; 25. P. K. Sharma: 26. T. N. Shivapuri; 27. A. K. Singh; 28. C. L. Singh; 29. R. S. Singh; 30. R. Singh; 31. A. M. Srivastava: 32. S. C. Srivastava; 33. S. P. Srivastava 34. S. C. Tripathi; 35. H. P. Varma; 36. K. Bahadur; 37. Usha Jyotishmati

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 3, July, 1980, Pages 207-221

पराश्रव्य विधि द्वारा प्राचीन और मध्यकालीन भारतीय मुद्राओं की विषमता का अध्ययन

सत्यप्रकाश तथा जे० वेणुगोपाल कृष्णमूर्ति

रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—जनवरी 15, 1980]

सारांश

पराश्रव्य तरंगों की सहायता से स्पन्दन तकनीक का प्रयोग करके प्राचीन भारतीय मुद्राओं की विषमता का अध्ययन किया गया। अध्ययन के लिए आहत (कार्षापण) मुद्राओं से लेकर मुगलकालीन मुद्राओं तक के क्रान्तिक कोण निकाले गए, जिनके आधार पर स्नेल-नियम का उपयोग करके प्रत्यास्थता गुणांक भी निकाले जा सकते हैं। प्राचीन उपलब्ध मुद्राओं की संरचना से स्पष्ट हो जाता है कि अधिकांश मुद्रायें जिन ठप्पों में ढाली जाती थीं, और जिस प्रकार मुद्रायें ठंढी की जाती थीं उनसे विषम संरचनाओं की मुद्राओं की ही आशा की जा सकती थी। कार्षापण, भारत-सासानी, लैंकीबुल, कुषाण, अवध देश की, काश्मीरी, यौधेय, बहमनी वंश की, मुगल साम्राज्य के प्रसिद्ध बादशाहों की मुद्राओं का अध्ययन प्रस्तुत किया गया।

Abstract

Ultrasonic study of the heterogeneity of some of the ancient and mediaeval Indian Coins. *By* Satya Prakash and Venu Gopala Krishnamurthy, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

The ultrasonic pulse-technique was utilized for the study of the elastic constants of several ancient and mediaeval coins of India, —punch-marked coins, Indo-sassanian coins, Lanky Bull coins, Kushana coins, Oudh coins, Kashmir coins, Yaudheya coins, Bahamani coins and Moghul coins. In the case of coins of heterogeneous nature, involving poor moulding technique, the critical angles for obverse and reverse in various positions indicated marked variations. Applying Snell's law, the several elastic constants were calculated from the density of the coin and the first and the second critical angles.

पुरातात्विक रसायनज्ञों का ध्यान प्राचीन मुद्राओं के रासायनिक और भौतिक परीक्षणों की ओर जाना स्वाभाविक था। सम्भवतया प्राचीन मुद्रा का सर्वप्रथम विश्लेषण और परीक्षण क्लैपरॉथ (Klaproth) ने किया। यह कार्य यूनानी और रोमन मुद्राओं पर था, जो तांबे, पीतल, काँसे और चांदी की बनी थीं (1798-1815 में क्लैपरॉथ ने इस सम्बन्ध में अपने परीक्षण फल प्रकाशित किए।) उन्नीसवीं शती में विभिन्न रसायन-वेत्ताओं ने लगभग 500 प्राचीन मुद्राओं पर काम किया। बीब्रा (Bibra)[2] और हाँफमेन (Hofmann)[3] के कार्य इस सम्बन्ध में उल्लेखनीय हैं। यूरोप के बाहर यह काम मन्दगति से ही चला। बीब्रा ने कतिपय चीनी मुद्राओं का भी विश्लेषण किया, किन्तु इन मुद्राओं की प्राचीनता में सन्देह था। 20वीं शती से पूर्व केवल एक भारतीय मुद्रा के परीक्षण का उल्लेख मिलता है। यह मुद्रा लेटसम (Lettsem) को मिली थी, शुद्ध चांदी की थी और इसके विश्लेषण-अंक फ्लाइट (Flight) ने प्रकाशित किए।[4]

प्रोफेसर अर्ल आर. केली (E.R. Caley) ने पिछले कतिपय दशकों में रोम और यूनान के सिक्कों पर बहुत महत्वपूर्ण कार्य किया और अनेक शोध-प्रबन्ध प्रकाशित किये।[5] भारत में पुरातत्व-रसायन संबंधी प्रारम्भिक कार्य सनाउल्लाह (Sanaullah) और हमीद (Hamid) का है जिसका विस्तृत विवरण आर्केलोजिकल सर्वे आव इण्डिया की वार्षिक रिपोर्टों में है। नालन्दा के ताम्रों और मिश्रधातुओं का अध्ययन लाल (Lal) ने भी किया। सत्यप्रकाश और रावत (Prakash and Rawat) ने कौसाम्बी में प्राप्त कतिपय प्राचीन वस्तुओं का विश्लेषण भी किया।[6] सत्यप्रकाश और राजेन्द्र सिंह (Prakash and Rajendra Singh) ने प्रयाग विश्वविद्यालय में भारतीय मुद्राओं के विश्लेषण और अध्ययन की बड़ी आयोजना हाथ में ली। अति प्राचीन मुद्राओं से लेकर मध्यकालीन मुद्राओं तक का रासायनिक विश्लेषण किया, स्पेक्ट्रोग्राफिक विश्लेषण भी किया और मुद्राओं के पृष्ठ का सूक्ष्मदर्शी फोटाग्राफ (microphotograph) से अध्ययन किया, और इन पृष्ठों की सूक्ष्म संरचनाओं (microstructures) के चित्र भी लिए। प्रकाश और राजेन्द्र सिंह ने अपने विस्तृत अध्ययन को 'काइनेज इन एन्शण्ट इण्डिया', नामक विस्तृत ग्रन्थ में प्रकाशित भी किया।

मुद्राओं के ढालने का काम कभी-कभी तो भारत में राज्याधीन रहा, और कभी-कभी शासन-स्वत्व के बाहर भी मुद्रायें ढाली जाती रही हैं। मुद्राओं का उपयोग व्यापार में होता है। देश में सबसे अधिक महत्व स्वर्ण की मुद्राओं का है। प्राचीन समय से भारतवर्ष समस्त सभ्य संसार को सोना उपलब्ध कराता रहा (विशेषतया तब तक जब तक कि दक्षिण अफ्रीका और दूरस्थ अमरीका की खानों का पता मनुष्य को न लगा)। दारिद्र्य के समय अथवा कम कीमत की मुद्राओं के लिये चांदी, ताँबा, जस्ता, वंग, और सीसा इन धातुओं के मिश्रों का भी प्रयोग बराबर होता रहा। सोने की मुद्रायें बहुधा गला कर धातु के नाम पर भी बेची जाती रहीं, और इनके आभूषण भी बनते रहे। फलतः हमारे संग्रहों में सोने की मुद्रायें बहुत कम मिलती हैं। सोने की सभी मुद्राओं में चाँदी और कुछ थोड़ा सा ताँबा भी रहता है। सोने की थोड़ी सी ही मात्रा हो तो हलके पीलेपन की एक मिश्रधातु बनती है जो इलेक्ट्रम (electrum) नाम से प्रसिद्ध है। गुप्तकालीन कुछ स्वर्ण मुद्राओं का उल्लेख अपने शोधप्रबन्धों में कतिपय मुद्रा इतिहासवेत्ताओं ने किया है[7] जैसे अलटेकर (Altekar), ब्राउन (Brown), चटर्जी (Chatterjee, C.D.), गुप्त (Gupta, P.L.); नारायण(Narayan A.K.), सिंहल (Singhal, C.R.), स्मिथ(Smith, V.A.),[8]

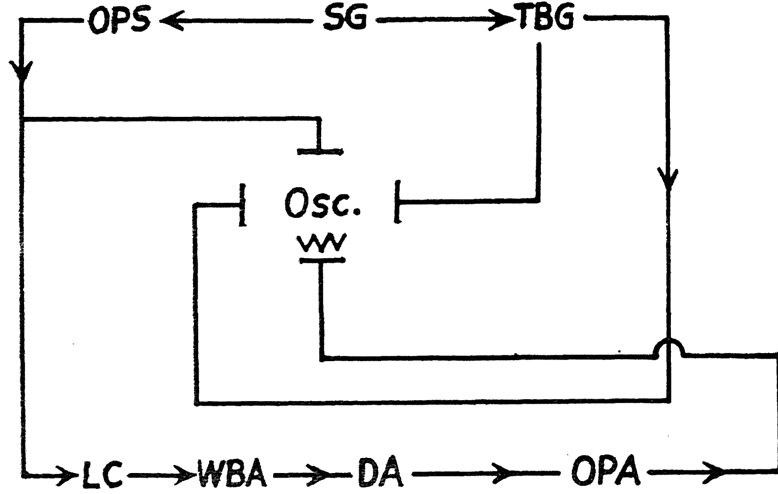
डा० बीरबल साहनी (Sahni) ने अपने एक महत्वपूर्ण लेख में उन उपकरणों का विवरण दिया, जिनकी सहायता से भारत के कतिपय स्थलों में सिक्के ढाले जाते थे।[9] अभी हाल में स्वामी ओमानन्द सरस्वती ने "भारत के प्राचीन लक्षण स्थान" नाम से एक पुस्तक प्रकाशित की है, जिसमें भारत की प्राचीन टकसालों का विवरण दिया गया है।[10] इस ग्रन्थ में नौरंगाबाद, बामला, रोहतक, सुनेत तथा कौशाम्बी की टकशालाओं का उल्लेख है। नौरंगाबाद बामला (हरयाणा) के निकटवर्ती प्राचीन खंडहरों में यौधेओं, भारतीय-यवन राजाओं तथा कनिष्क, हुविष्क आदि कुषाण राजाओं की टकशालायें पायी गयी हैं; और उनमें भारी संख्याओं में सबके साँचों तथा ठप्पों के साथ धातु मापने की कुठालियाँ भी मिली हैं। प्रोफेसर बीरबल साहनी ने अपना कार्य उस टकशाला के सम्बन्ध में किया था, जो रोहतक के खोकराकोट में मिली थी और यह भी यौधेयों की एक महत्वपूर्ण टकशाला थी। भारत में अन्य भी अनेक टंकशालायें रही होंगी, इसमें सन्देह नहीं। राजकीय टकशालायें हों, या वैयक्तिक व्यापारियों की, सिक्कों का बहुधा मूल्य सिक्के की धातु का मूल्य होता था, इसलिए हमारे सिक्के दूरस्थ देशों और प्रदेशों में जाते थे, और इनके व्यवहार में पारस्परिक विनिमय की दरों की कोई समस्या प्रस्तुत नहीं होती थी। किन्तु दैवात् ऐसे समय भी आते थे जब पुराने मूल्यवान सिक्कों को गला कर घटिया सिक्के तैयार करने पड़ते थे। दुर्भिक्ष और शत्रुओं के आक्रमण से विध्वस्त घटनाओं के समय ऐसा बहुधा होता था।

टकशालायें मुद्रा ढालने में बहुधा सावधानियाँ रखने का कोई प्रामाणिक प्रबन्ध नहीं था। सिक्के ढालने वालों की व्यक्तिगत निपुणता पर ही यह कार्य निर्भर रहता था कि सिक्कों की ढलाई अच्छी हुई है (समांगी, homogenous या विषमांगी, heterogenous)। गली हुई मिश्र धातु में विभिन्न धातुओं का अनुपात सम था या विषम और मुद्राओं को ठंडा करते समय ताप किस गति से नीचे गिरा, इन सब बातों पर ढली हुई मुद्रा का विषम या सम होना निर्भर करता है। प्रस्तुत शोध निबन्ध में हम अपने इस अध्ययन को प्रस्तुत करने का प्रयास करेंगे। अति प्राचीन आहत या छिद्रांकित मुद्राओं (punch-marked coins) से लेकर आधुनिक मुद्राओं तक की विषमताओं का अध्ययन पराश्रव्य विधि से हमने किया। अपने प्रयोगों के फलों को हम इस प्रबन्ध में देने का प्रयास कर रहे हैं। आहत मुद्रायें कार्षापण नाम से भी प्रसिद्ध हैं, विदेशी विद्वानों ने इन्हें ही पंच-मार्क्ड (आहत, छिद्रांकित) मुद्रा कहा है। ये कार्षापण मुद्रायें यूनानियों के आक्रमण से पूर्व भी हमारे देश में प्रचलित थीं, और इनका उल्लेख हमारे साहित्य में बहुधा किया गया है।

प्रयोगात्मक

पराश्रव्य-विधि की विशेषता यह है, कि इसके प्रयोग में मुद्रा की किसी भी प्रकार की क्षति नहीं होती। इन प्रयोगों के लिए पीतल की बनी आयताकार एक सेल लेते हैं। सेल(LC)में हम लोगों ने पानी भरा (पानी और मुद्रा का सम्पर्क इतने थोड़े समय के लिए होता है, कि पानी और मुद्रा के बीच में कोई भौतिक या रासायनिक प्रक्रिया नहीं होती, यह अनुमान किया ही जा सकता है।) सिक्के को इस पानी में लटकाया जाता है। सेल में आमने-सामने की दीवारों पर क्वार्ट्ज के दो क्रिस्टल एक दूसरे के समान्तर लगे होते हैं। ये क्रिस्टल क्रमशः ट्रान्सड्यूसर और रिसीवर (अभिग्राही) का काम करते हैं। इस प्रविधि का नाम पल्स-टेक्नीक (स्पन्द-प्रविधि) है। इस प्रविधि में (SG) सिंक्रोनाइजिंग जेनरेटर (तुल्यकालिक जनित्र, Synchro-

nizing generator), TBG, समय-आधारित जनित्र (time-based generator), WBA, दीर्घ-बैण्ड एमप्लीफायर (wide band amplifier, प्रवर्धक), DA, डिटेक्टर एम्प्लीफायर (detector, अभिज्ञापक), और OPA, निर्गत-प्रवर्धक (output amplifier) का क्रमबद्ध संयोजन होता है। OSC, दोलनलखी oscillograph है और OPS निर्गत स्थान (out put stage) है। (चित्र 1)।



चित्र 1 स्पन्द प्रविधि (pulse technique)

प्रारम्भ में मुद्रा (सिक्के) को आगत पराश्रव्य तरंग के समकोण पर रखते हैं। फिर इसे धीरे धीरे घुमाते जाते हैं। ऐसा करने पर 90° के भीतर ही दो क्रान्तिक कोण (critical angle) प्राप्त होंगे (θ_1 और θ_2)। जब मुद्रा अनुदैर्ध्य तरंग (longitudinal wave) की दिशा के लम्बरूप (90° पर) होगी, तरंग पूरी मात्रा में अनुदैर्ध्य तरंगों के रूप में मुद्रा में से आरपार चली जायगी। मुद्रा घुमाने पर जैसे जैसे यह कोण 90° से कम होता जायगा, तो एक कोण ऐसा आवेगा कि अनुदैर्ध्य तरंग बिल्कुल भी सिक्के से बाहर नहीं निकलेगी (अनुदैर्ध्य तरंग का पारगमन शून्य होगा)। इस कोण को प्रथम क्रान्तिक कोण (θ_1) कहेंगे। मुद्रा के और भी घुमाये जाने पर दूसरा क्रान्तिक कोण (θ_2) मिलेगा—यह वह कोण है, जिस पर अपरूपक तरंगों (Shear waves) का भी मुद्राओं से पारगमन रुक जायेगा। इस क्रान्तिक कोण के आगे की प्रत्येक स्थिति में पराश्रव्य तरंगों का मुद्रा में से पारगमन बिल्कुल बन्द हो जायगा (यदि मुद्रा न्यूनतम-विशेष आकार की हो।

क्रान्तिक कोण और प्रत्यास्थ नियतांक—इस प्रकार प्रत्येक मुद्रा के दो क्रान्तिक कोण हमें प्राप्त हो गए θ_1 और θ_2। इन कोणों को मापकर हम मुद्रा सम्बन्धी अनेक प्रत्यास्थ नियतांक (elastic constants) निम्न समीकरणों के आधार पर निकाल सकते हैं—

$$V'_L = V_L / \sin\theta_1$$
$$V'_S = V_L / \sin\theta_2$$

इन समीकरणों में द्रव में अनुदैर्ध्य तरंगों का वेग V_L है। मुद्रा में होकर जाने वाली अनुदैर्ध्य तरंग का वेग V'_L है, और मुद्रा में होकर जाने वाली अपरूपक तरंग का वेग V'_S है। अनुदैर्ध्य तरंग से सम्बन्ध रखने

वाला पहला क्रान्तिक कोण θ_1 है, और दूसरा क्रान्तिक कोण θ_2 अपरूपक तरंग से सम्बन्ध रखता है। मुद्रा के इस अध्ययन में हमने पानी का द्रव के रूप में उपयोग किया, और 27°C पर प्रयोग किए। 27°C पर पानी के भीतर अनुदैर्ध्य तरंगों का वेग 1470 मीटर / सेकण्ड मानकर प्रत्यास्थ नियतांक निकाले गये।

विवेचना

इसमें सन्देह नहीं कि विभिन्न देशों की आधुनिक प्रविधियों में मुद्रा ढालने में ताप और घनत्व का अच्छा नियन्त्रण रखा जाता है। मुद्रायें ठण्डी भी धीरे धीरे समांग रूप से की जाती हैं। यही कारण है कि सारणी 1 में प्रदर्शित आधुनिक मुद्राओं में θ_1 और θ_2 क्रान्तिक कोणों में कोई विशेष अन्तर नहीं है। वाम दिशा और दक्षिण दिशा में एवं सीधी मुद्रा (obverse, मुख) और उलटी मुद्रा (reverse, पृष्ठ) दोनों में सारणी 1 में हमने आधुनिक मुद्रायें लीं—भारत, फ्रान्स, ब्रिटेन, अरब आदि देशों की। सभी देशों में जो मुद्रायें पिछली शती में ढाली जाती रही हैं, वे समांगी रही हैं।

सबसे पुरानी जिन मुद्राओं का हमने अध्ययन किया, वे चिह्नांकित, छिद्रांकित या आहत मुद्रायें (punch-marked) कहलाती हैं। इनका पुराना नाम **कार्षापण** भी है। डॉ० डी० कोसम्बी (1949) ने रायल ऐशियाटिक सोसायटी (बम्बई शाखा) की पत्रिका में कई लेख प्रकाशित किये जिनमें पंच-मार्क्ड मुद्राओं का विस्तृत विवरण दिया गया है। ये धातु के टुकड़ों को पीटकर तैयार की जाती थीं और साँचों में ढालकर भी। कोसाम्बी ने इन्हें कई वर्गों में विभाजित किया है, और उनके विभाजन का आधार मुद्रा की भ्रष्टता है। जो मुद्रा जितनी प्रचलित रही, उतनी ही भ्रष्ट हो गयी। मुद्राओं की विषमता टंकशाला की तकनीक पर भी निर्भर रही। आन्ध्र प्रदेश में भी आहत मुद्रायें पायी गयी हैं (230 B.C.)। तक्षशिला की आहत मुद्राओं का विवरण कोसाम्बी ने दिया है जिनके मुखभाग पर चिह्न अंकित हैं, और पृष्ठ भाग के चिह्न किसी मुद्रा में तो बहुत से हैं, और किसी किसी में एक भी नहीं। सम्भवतया तक्षशिला की आहत मुद्राओं में सबसे पहली मुद्रा अजातशत्रु की है। अजातशत्रु के बाद शुशुनाग, कालाशोक, नन्दीवर्धन, नन्दिन, महापद्म, चन्द्रगुप्त आदि की कार्षापण मुद्रायें। बोडैनयकानूर (Bodenayakanur) भाण्डार (मद्रास संग्रहालय में) भी कार्षापण मुद्राओं का अच्छा संग्रह है। उत्तर प्रदेश के खीरी जिला में एक भण्डार मिला जिसमें 1245 आहत मुद्रायें (कार्षापण) चाँदी की थीं। ये सम्भवतया कोशल-राज्य की हैं (ईसा से 5 शती पूर्व)। एस० एन० चक्रवर्ती ने बम्बई प्रदेश की आहत मुद्राओं का विवरण प्रकाशित किया है (प्रकाश और राजेन्द्र सिंह, (Coinage in Ancient India, अध्याय 5, 85-101)।

सारणी 2 में क्रान्तिक कोणों का जो विवरण दिया है, उससे स्पष्ट है कि θ_1 के मान प्रत्येक सिक्के में मुख-भाग के, पृष्ठ भाग के, दक्षिण और वाम के परस्पर में कितने भिन्न हैं। यह भिन्नता स्पष्टतया अंकित करती है, कि मुद्रा की संरचना कितनी विषम है—पहली मुद्रा के लिए $\theta_1 = 14°, 40°, 23°, 19°$,—परस्पर में इतने भिन्न हैं। θ_2 का मान भी 28°, 60°, 51°, 52° इस प्रकार है।

सारणी 3 में हमने दो भारत-सासानी मुद्राओं का उल्लेख किया है। पहली मुद्रा (भार 3.55 ग्राम) में समांगता अधिक है। इसकी ढलाई काफ़ी सावधानी से की गयी प्रतीत होती है। इसीलिए θ_1 के मान चारों स्थितियों में इस प्रकार हैं—$\theta_1 = 17°, 17°, 17°30', 17°$, और इसी प्रकार θ_2 के मान भी 41°

और 43° के बीच में हैं। दूसरी भारती-सासानी मुद्रा (भार 3·716 ग्राम) पहली मुद्रा की अपेक्षा अधिक विषमांगी है (θ_1=22°, 19° 30′, 22° 30′, 21° 30′, और θ_2=41°, 50°, 43°, 44°)।

सारणी 4 में लैंकी बुल मुद्रा का विवरण दिया गया है। जो मुद्रा हमें मिली वह बहुत भ्रष्ट और भंगुर थी, और इसके क्रान्तिक कोण नापे नहीं जा सके। लैंकीबुल मुद्रा के मुख-भाग (obverse) पर काल्पनिक पशु का चित्र बना होता है, जिसका एक हिस्सा घोड़े का सा और दूसरा बैल ऐसा होता है। इसके पृष्ठ भाग पर चक्र, स्वस्तिक या इसी प्रकार का कोई और चित्र होता है। उज्जयिनी राज्य के निकट की ये मुद्रायें हैं (325-25 B.C. की बनी हुई)।

सारणी 5 में हमने कुषाण ताम्र मुद्राओं के लिए क्रान्तिक कोण दिए हैं। इन मुद्राओं के मुख-भाग पर राजा का चित्र और इनके पृष्ठ भाग पर किसी काल्पनिक देवता का चित्र बहुधा रहता है (25-425 A.D.)। हमें इस समय पाँच मुद्राओं के अध्ययन करने का अवसर मिला। एक ही मुद्रा के लिए चारों क्रान्तिक कोण θ_1 और θ_2 काफी भिन्न हैं, जिससे कि मुद्रा की विषमांगता स्पष्ट है। उदाहरण के लिए, मुद्रा 3 (भार 12. 335, θ_1=18°, 16° 30′, 19°, 18°, और θ_2=40°,40°, 42°, 46°)

सारणी 6 में अवध प्रदेश की तीन मुद्राओं से सम्बन्ध रखने वाले क्रान्तिक कोण हमने दिये हैं। ये तीनों मुद्रायें संरचनाओं में बड़ी विषम हैं (मुद्रा 3, भार 11·06; θ_1=18°30′, 19°30′, 18°30′, 20° 30′; और θ_2=57°, 64°, 59° 30,′ 66°)

सारणी 7 में हमने 2 काश्मीरी मुद्राओं के लिए क्रान्तिक कोण दिए हैं, जो 100 A.D. की हैं। ये मुद्रायें काफी अच्छी और समांग हैं θ_1= 17° और 18° के बीच में, θ_2=34° और 37° के बीच में—मुद्रा 1) 1 दो यौधेय मुद्राओं का भी हमने अध्ययन किया (सारणी 8)। ये बहुत विषम नहीं हैं, और इनकी ढलायी सावधानी से की गयी प्रतीत होती है (मुद्रा 2—θ_1 =15°30′ और 19° के बीच में; θ_2=41° और 44° के बीच में)।

सारणी 9 में बहमनी वंश की चार मुद्राओं के लिए क्रान्तिक कोण दिए गए हैं। इनमें से कोई मुद्रा तो सन्तोषजनक समांगी है, पर अधिकतर विषमांगी हैं। θ_1 और θ_2 के मानों से यह विषमता स्पष्ट प्रतीत होती है। शेरशाह और इस्लामशाह की मुद्राओं के क्रान्तिक कोण सारणी 10 में दिए गए हैं। ये मुद्रायें स्पष्टतया समांगी हैं। इनके क्रान्तिक कोण इनकी सन्तोषजनक संरचना के परिचायक हैं।

सारणी 11 में हमने औरंगजेब की मुद्राओं के क्रान्तिक कोण दिए हैं। औरंगजेब के समय मुगल साम्राज्य अपनी चरम सीमा पर पहुँच चुका था, पर देश में शान्ति न थी। मराठे, राजपूत और सिक्ख मुगल शासन से लोहा ले रहे थे। स्पष्ट है कि ऐसे समय की दुरवस्था इस काल के ढले सिक्कों से भी व्यक्त होती हो। θ_1 और θ_2 दोनों के अंक इस बात को व्यक्त करते हैं। उदाहरणतः, मुद्रा 3 के लिए θ_1=13°30′, 18°00′, 14°30′, 13°30′, θ_2=37°,40°, 38°, 32°।

अकबर की तीन मुद्राओं का भी हमने अध्ययन किया (सारणी 12)। अकबर कुशल शासक था,

लोकप्रिय था, किन्तु मुद्रायें इसके समय की विषम संरचना वाली थीं, यह आश्चर्य है। मुद्रा 2 के लिए, $\theta_1=17°, 18°, 17°30', 20°30'$ और $\theta_2=30°, 39, 39', 44'$।

सारणी 13 में हमने मुगलकालीन आठ मुद्राओं के विवरण दिए हैं। अकबर, जहाँगीर, शाहजहाँ और औरंगजेब चारों के शासन समय की मुद्रायें लगभग एक सी विषमांगी हैं। θ_1 और θ_2 के तुलनात्मक मानों मे यह बात स्पष्ट है।

सारणी 14 और 15 में हमने दो मुद्राओं के क्रान्तिक कोण दिए हैं जो कौसाम्बी और तक्षशिला के हैं, एक मुद्रा जैमिसिस है, एक चोलवंश की और लैंकीबुल की। इन पाँचों मुद्राओं के θ_1 और θ_2 के औसत मानों को लेकर हमने इन मुद्राओं के प्रत्यास्थता गुणांकों की गणना की है जो सारणी 15 में दिए गए हैं।

θ_1= वह क्रान्तिक कोण जिस पर मुद्रा में अनुदैर्ध्य तरंग का पारगमन सर्वथा रुक गया।

θ_2= वह क्रान्तिक कोण जिस पर मुद्रा में अपरूपक तरंग का पारगमन सर्वथा रुक गया।

K, आयतन-प्रत्यास्थ गुणांक$=V'_L/V'_S$

σ, पॉयसाँन अनुपात$=\frac{K^2-2}{2(K^2-1)}$

E, यंग का गुणांक $=2(1+\sigma)F$

F अपरूपण गुणांक $=\frac{V'^2}{S}\rho$

ρ, मुद्रा का घनत्व

स्नेल का नियम

$$\frac{\sin\theta}{V_L}=\frac{\sin\theta_L}{V'_L}=\frac{\sin\theta_S}{V'_S}$$

θ=मुद्रा के पृष्ठ पर अनुदैर्ध्य तरंगों के आपतन का कोण

V'_L=मुद्रा के भीतर अनुदैर्ध्य का वेग

V'_S=मुद्रा के भीतर अपरूपण-तरंगों का वेग

θ_L=मुद्रा के भीतर अनुदैर्ध्य तरंगों के पारगमन का कोण

θ_S=मुद्रा के भीतर अपरूपण-तरंगों के पारगमन का कोण

यह स्मरण रखना चाहिए कि द्रवों में होकर अपरूपण तरंगें आरपार नहीं जातीं, अत: ठोस मुद्रा पर केवल अनुदैर्ध्य तरंगों का आपतन होता है।

जब हम मुद्रा को अनुदैर्घ्य तरंगों की दिशा के लम्ब-रूप रखते हैं, तो तरंगें मुद्रा में प्रविष्ट होती है, और वे केवल अनुदैर्घ्य होती हैं। बाद को जैसे-जैसे मुद्रा को घुमाते हैं, आपतन कोण 90° से कम होता जाता है, एक ऐसा क्रान्तिक बिन्दु आता है, जिस पर अनुदैर्घ्य तरंग का मुद्रा में होकर पारगमन शून्य हो जाता है (इनका परावर्तन हो जाता है)। यह हमारा प्रथम क्रान्तिक कोण (θ_1) है। अब यदि हम मुद्रा को और भी आगे घुमाते जायं तो दूसरा क्रान्तिक कोण (θ_2) मिलेगा, जिस पर मुद्रा में होकर अपरूपण तरंगों का पारगमन भी बिलकुल बन्द हो जायगा।

क्रान्तिक कोणों के आधार पर ही हमने इस निवन्ध में मुद्राओं की विषमता के प्रदर्शन का प्रयास किया है। सभी मुद्राओं के प्रत्यास्थता-नियतांकों की हमने गणना नहीं की है। केवल सारणी 14 में दिए गए क्रान्तिक कोणों के आधार पर पाँच मुद्राओं के प्रत्यास्थता गुणांकों की गणना सारणी 15 में अंकित की गयी है।

सारणी 1

आधुनिक मुद्रायें : क्रान्तिक कोण

		मुख		पृष्ठ	
		दक्षिण	वाम	दक्षिण	वाम
1.	5RF फ्रैंक, 1945	θ_1=11°30′	11°30′	11°30′	11°30′
		θ_2=32 00	32 00	32 30	32 30
2.	पेनी, ब्रिटेन, 1936	θ_1=18 30	18 00	18 30	18 30
		θ_2=48 00	47 30	48 00	47 30
3.	अरबी, 1900	θ_1=19 30	19 00	18 30	18 30
		θ_2=40 00	40 30	40 00	40 00
4.	हेलिआना, 1952	θ_1=12 30	12 30	12 30	13 30
		θ_2=32 30	32 30	32 00	32 30
5.	फ्रैंक, 1943	θ_1=13 00	13 00	13 00	13 30
		θ_2=35 00	34 30	34 30	35 00
6.	शिलिंग, 1953	θ_1=17 00	17 00	17 00	17 00
		θ_2=35 00	35 30	35 30	35 30
7.	पैसा-भारतीय	θ_1=18 00	18 00	18 30	18 00
		θ_2=35 30	35 30	36 00	35 30

सारणी 2

आहत या चिन्ह्नांकित मुद्रायें (कार्षापण) (300-200 B. C.)

आयताकार; पृष्ठ भाग पर पशु आदि के चित्र-हाथी सूर्य, षड्अर, चक्र, पेड़ या पर्वत

	भार (gm.)	आकार (mm.)	मोटाई (mm.)	घनत्व	मुख दक्षिण	मुख वाम	पृष्ठ दक्षिण	पृष्ठ वाम
1.	3·240	12×12	0·29	6·77	θ_1=14°00′	40°00′	23°30′	19°30
					θ_2=28 00	60 00	51 00	52 00
2.	3·260	15×23	2·28	6·64	θ_1=9 30	17 30	10 30	14 00
					θ_2=25 00	55 00	19 00	40 00
3.	3·215	12×22	0·26	6·89	θ_1=20 00	10 30	21 30	11 30
					θ_2=56 00	39 00	57 00	41 00

सारणी 3

भारत-सासानी मुद्रायें (550-700 A. D.)

	भार (gm.)	आकार (mm.)	मोटाई (m.m)	घनत्व	मुख दक्षिण	मुख वाम	पृष्ठ दक्षिण	पृष्ठ वाम
1.	3·550	18	0·36	6·53	θ_1=17°00′	17°00′	17°30′	17°00
					θ_2=41 00	42 00	42 00	43 00
2.	3·716	19	0·38	6·84	θ_2=22 00	19 30	22 30	21 30
					θ_2=41 00	50 00	43 00	44 00

सारणी 4

लैंकी-बुल मुद्रा (325-75 B. C) पशु का चित्र (अश्व+वृषभ)

(अति भ्रष्ट और भंगुर)

मुख दक्षिण	मुख वाम	पृष्ठ दक्षिण	पृष्ठ वाम
θ_1=17°30′	17°00	?	?
θ_2=41°00	?	42°30′	44°00′

(?=स्पन्दन में कोई अवपात नहीं, अतः क्रान्तिक कोण नापा न जा सका)

सारणी 5

कुषाण-ताम्र मुद्रा (25-425 A. D.)

	भार (gm.)	आकार (mm.)	मोटाई (mm.)	घनत्व	मुख		पृष्ठ	
					दणिण	वाम	दक्षिण	वाम
1.	14·905	24	0·35	8·61	$\theta_1=16^\circ 00'$	$19^\circ 00'$	$16^\circ 00'$	$16^\circ 00'$
					$\theta_2=36$ 00	40 00	36 00	40 30
2.	13·995	21	0·28	8·22	$\theta_1=18$ 30	19 30	18 30	20 30
					$\theta_2=31$ 30	38 00	32 30	37 30
3.	12·335	20	0·35	7·79	$\theta_1=18$ 00	16 30	19 00	18 00
					$\theta_2=40$ 00	40 00	42 00	46 00
4.	15·995	24	0·40	7·95	$\theta_1=16$ 00	18 00	17 30	16 00
					$\theta_2=42$ 00	45 00	46 00	47 00
5.	14·897	23	0·30	8·17	$\theta_1=18$ 00	20 00	19 00	17 00
					$\theta_2=42$ 00	44 00	43 00	46 00

(गोल मुद्रायें। मुख-भाग पर शासक का चित्र और पृष्ठ भाग पर किसी देवता का चित्र)

सारणी 6

अवधी मुद्रायें (1700 A. D.)

	भार (gm.)	आकार (mm.)	मोटाई (mm.)	घनत्व	मुख		पृष्ठ	
					दक्षिण	वाम	दक्षिण	वाम
1.	10·465	20·5	0·41	10·43	$\theta_1=22^\circ 30'$	$20^\circ 30'$	$22^\circ 00'$	$19^\circ 30'$
					$\theta_2=55$ 00	56 00	63 00	53 00
2.	10·723	19·5	0·39	9·89	$\theta_1=15$ 30	16 30	15 30	16 30
					$\theta_2=39$ 00	42 00	44 00	40 30
3.	11·06	19·0	0·41	10·52	$\theta_1=18$ 30	19 30	18 30	20 30
					$\theta_2=57$ 00	64 00	59 30	66 00

सारणी 7

कश्मीर की मुद्रायें (100 A. D.)

	भार (gm.)	आकार (mm.)	मोटाई (mm.)	घनत्व	मुख		पृष्ठ	
					दक्षिण	वाम	दक्षिण	वाम
1.	7·612	16·0	0·41	7·53	θ_1=17°00′	18°00′	17°00′	18°00′
					θ_2=34 00	32 00	35 00	37 00
2.	6·852	17	0·40	7·86	θ_1=18 00	20 30	17 00	20 30
					θ_2=35 00	38 30	36 30	34 00

सारणी 8

यौधेय मुद्रायें

	भार (gm.)	आकार (mm.)	मोटाई (mm.)	घनत्व	मुख		पृष्ठ	
					दक्षिण	वाम	दक्षिण	वाम
1.	11·190	22	0·41	9·55	θ_1=15°30′	14°00′	17°30′	15°00′
					θ_2=36 00	33 00	38 00	35 00
2.	5·154	20	0·40	9·38	θ_1=19 00	17 30	16 30	15 30
					θ_2=44 00	41 00	41 00	41 00

सारणी 9

बहमनी वंश की मुद्रायें

1., 2. बिन महमूदशाह, 1358-1373; 3. हुमायुँशाह, 1457-1461;
4. मुहम्मद, तृतीय 1463-1482.

	भार (gm.)	आकार (mm.)	मोटाई (mm.)	घनत्व	मुख		पृष्ठ	
					दक्षिण	वाम	दक्षिण	वाम
1.	15·650	18	0·58	7·97	θ_1=17°00′	18°00′	19°00′	16°00′
					θ_2=42 00	37 00	39 00	37 30
2.	16·357	20	0·50	8·46	θ_1=16 30	17 00	18 30	16 30
					θ_2=41 00	36 30	37 30	36 00
3.	16·990	19	0·60	8·37	θ_1=17 00	18 00	14 00	17 00
					θ_2=38 00	41 30	36 00	36 00
4.	19·735	20	0·60	8·35	θ_1=16 00	20 00	21 00	16 00
					θ_2=38 00	40 30	40 00	39 00

सारणी 10

शेरशाह (1539-45) और इस्लामशाह (1545-53)

नं० 1 और नं० 3 (शेरशाह); नं० 3 (इस्लामशाह)

	भार (gm.)	आकार (mm.)	मोटाई (mm.)	घनत्व	मुख दक्षिण	मुख वाम	पृष्ठ दक्षिण	पृष्ठ वाम
1.	20·370	20	0·61	8·41	θ_1=16°30′	17°30′	17°00′	16°30′
					θ_2=36 00	38 30	38 00	38 30
2.	20·145	20	0·70	8·51	θ_1=18 30	16 30	16 00	17 30
					θ_2=38 30	37 30	36 00	39 30
3.	20·490	21	0·70	8·42	θ_1=17 00	16 00	16 00	16 00
					θ_2=36 30	38 00	38 00	37 00

सारणी 11

औरंगजेब की मुद्रायें (1658-1707 A. D.)

	भार (gm.)	आकार (mm.)	मोटाई (mm.)	घनत्व	मुख दक्षिण	मुख वाम	पृष्ठ दक्षिण	पृष्ठ वाम
1.	20·680	20	0·69	8·44	θ_1=17°30′	18°00′	19°00′	17°00′
					θ_2=37 00	41 00	41 00	40 00
2.	20·770	20	0·66	8·29	θ_1=19 00	15 00	20 30	15 30
					θ_2=45 00	39 00	44 00	37 00
3.	30·301	21	0·62	8·46	θ_1=13 30	18 00	14 30	13 30
					θ_2=37 00	40 00	38 00	32 00
4.	20·765	22	0·60	8·40	θ_1=17 30	21 30	15 30	14 30
					θ_2=40 00	40 00	36 00	38 00

सारणी 12

अकबर की मुद्रायें (1556-1605 A. D.)

मुख भाग पर अकबर का चित्र और पृष्ठ भाग पर टंकशाला का नाम

	भार (gm.)	आकार (mm.)	मोटाई (mm.)	घनत्व	मुख दक्षिण	मुख वाम	पृष्ठ दक्षिण	पृष्ठ वाम
1.	19.070	17	0·50	8·37	θ_1=20°00′	17°00′	22°30′	18°00′
					θ_2=39 00	39 00	49 00	34 00
2.	20·005	22	0·40	8·36	θ_1=17 00	18 00	17 30	20 30
					θ_2=30 00	39 00	39 00	44 00
3.	18·730	18	0·50	8·37	θ_1=20 00	17 00	22 30	18 00
					θ_2=39 00	39 00	49 00	34 00

सारणी 13

सोलहवीं से अट्ठारहवीं शती तक की मुद्रायें

(गोल मुद्रायें, मुख भाग पर शासक का चित्र; पृष्ठ भाग पर टंकशाला का नाम)

भार (gm.)	आकार (mm.)	मोटाई (mm.)	घनत्व	मुख		पृष्ठ	
				दक्षिण	वाम	दक्षिण	वाम
इस्लामशाह (1545-1553)							
11·230	31	0·39	10·18	θ_1=20°30′	22°30′	22°00′	22°00
				θ_2=59 00	60 00	54 00	59 00
अकबर (1556-1605)							
11·287	26	0·39	10·33	θ_1=19 30	18 30	18 00	21 00
				θ_2=58 00	57 00	60 00	61 00
	27	0·40	10·27	θ_1=15 30	15 30	17 00	17 00
				θ_2=45 00	56 00	57 00	59 30
जहाँगीर (1605-1627)							
11·225	20	0·30	10·37	θ_2=21 30	19 30	21 00	18 30
				θ_2=60 00	59 00	54 30	60 00
शाहजहाँ (1627-1658)							
11·230	20	0·34	10·36	θ_1=25 00	23 00	25 00	24 30
				θ_2=56 00	51 30	52 00	54 30
10·085	21	0·32	10·43	θ_1=21 30	17 30	17 30	20 00
				θ_2=59 00	47 00	45 00	59 00
औरंगजेब (1658-1707)							
11·325	21	0·32	10·43	θ_1=20 30	17 00	11 30	17 00
				θ_2=60 00	54 00	32 00	54 00
11·261	24	0·33	10·39	θ_1=20 30	20 00	19 30	22 30
				θ_2=57 30	61 30	56 30	64 30

सारणी 14

विविध मुद्रायें

	भार (gm.)	आकार (mm.)	मोटाई (mm.)	घनत्व	मुख दक्षिण	मुख वाम	पृष्ठ दक्षिण	पृष्ठ वाम
कौसाम्बी	5·640	17 × 16	0·32	6·63	θ_1=17°30′	16°00′	17°00′	16°30′
					θ_2=36 00	35 00	38 00	36 00
तक्षशिला	8·97	14 × 20	0·42	7·83	θ_1=15 00	19 30	19 00	16 30
					θ_2=30 00	40 00	39 00	38 00
जेमिसिस	14·690	25	0·36	7·90	θ_1=19 00	18 00	21 00	19 00
					θ_2=39 00	39 00	43 00	38 30
चोल	8·279	20	0·39	8·12	θ_1=20 30	21 20	20 00	19 00
					θ_2=44 00	42 00	45 30	40 00
लैंकी बुल	5·675	29	0·37	6·54	θ_1=11 30	17 00	20 00	20 00
					θ_2=24 00	37 00	41 30	41 00

सारणी 15

कुछ मुद्राओं के प्रत्यास्थता नियतांक

K आयतन प्रत्यास्थ गुणांक; σ (पायसाँ अनुपात), E (यंग-गुणांक) और F (अपरूपण गुणांक)

	घनत्व ρ	θ_1 mean	θ_2 mean	V'_L M/sec	V'_S M/sec	K	σ	E $\times 10^{11}$	F $\times 10^{11}$
कौसाम्बी	6·63	16°45′	36°15′	5104	2487	2·0022	0·3440	11·02	4·101
तक्षशिला	7·83	17°30′	36°15′	4956	2487	1·9968	0·3326	12·90	4·842
जेमिसिस	7·90	19°15′	39°52′	4461	2293	1·9454	0·3205	10·97	4·154
चोल	8·12	20°00′	42°22′	4298	2183	1·9688	0·3261	10·26	3·870
लैंकीबुल	6·54	17°80′	35°45′	4936	2515	1·9825	0·3293	11·00	4·137

(सारणी 14 के आधार पर यह नियतांक निकाले गये हैं।)

निर्देश

1. क्लेपरॉथ, एम० एच० Beitraeg zur Chemischen Kenntniss der Mineralkoerper, Berlin and Stettin, 1815

2. बीब्रा, ई० वॉन Die Bronzen und Kupferlegirungen der alten und Seltesten Voelker, Erlangen, 1869.

3. हॉफमान, के० बी०, **Numismatische Zeitschrift,** 1884, **16**, 1-57; 1885, **17**, 1-50.

4. फ्लाइट, डब्ल्यू०, Contributions to our knowledge of the composition of alloys and metal-work, for the most part ancient., **J. Chem.** Soc. 1882, **41**, 134-145.

5. केली, ई० आर०, **Ohio J.** Sc. 1950, **50,** 107-120; 1955, 55,137, 311; 1956, **56,** 285-289.; Analysis of ancient metals, प्रेगॉमान प्रेस, 1964.

6. प्रकाश और रावत, Chemical Study of Some Indian Archaeological Antiquities, बम्बई 1965.

7. प्रकाश और सिंह, Coinage in Ancient India, नई दिल्ली 1968.

8. अलटेकर, ए० एस०, Coinage of the Gupta Empire and its limitations, बनारस, Numis. Soc. of India, 1957: चन्द्रगुप्त के दो स्वर्ण सिक्के **J. Nnmis. Soc. India,** 1956, **18**, 51; ब्राउन, सी० जे०. Catalogue of the Coins of Guptas, लखनऊ संग्रहालय, 1920; चटर्जी, सी० डी०, Journ, U. P. H. S., 1957, **5**, 43-116 (गुप्तवंशीय स्वर्ण मुद्रा); गुप्त, पी० एल०, **J. Numis. Soc. India,** 1950, **12**, 31 (कुमार गुप्त, द्वितीय, तृतीय, के स्वर्ण सिक्के); 1952, **14**, 118; नारायण, ए० के०, **J. Numis. Soc. India,** 1950, **12,** 112; सिंहल, सी० आर०, **J. Numis.. Soc.** 1953, **15,** 195 गुजरात से उपलब्ध स्वर्णमुद्रायें; स्मिथ, वी० ए०, गुप्तयुग की स्वर्णमुद्राओं का विवरण।

9. साहनी, बीरबल, **Memoir Numis Soc. of India**, 1945 इस विवरण के लिए देखो-प्रकाश और राजेन्द्र सिंह, Coinage in Ancient India, 1968, अध्याय XI, p. 201-237

10. ओमानन्द सरस्वती, भारत के प्राचीन लक्षण-स्थान, Ancient Mints of India, 1970

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 3, July, 1980, Pages 223-233

अफगानिस्तान से प्राप्त कतिपय आद्यताम्र संकरों का रासायनिक संघटन

अर्ल आर० कैले
प्रोफेसर एमेरिटस रसायन विज्ञान
ओहायो स्टेट यूनिवर्सिटी, कोलम्बस, ओहायो

[प्राप्त—सितम्बर 1, 1979]

सारांश

प्रस्तुत लेख में 1950-70 की अवधि में पुरातात्विक खुदाइयों में अफगानिस्तान से प्राप्त आद्यताम्र संकरों के कुछ नमूनों का रासायनिक संघटन दिया गया है।

सत्यप्रकाश तथा रावत[1] ने अपनी पुस्तक में सारणियों के रूप में अनेक विश्लेषण दिये हैं जिससे पता चलता है कि प्राचीन भारत में प्रयुक्त ताम्र संकरों के रासायनिक संघटन के सम्बन्ध में काफी ज्ञान था। इसके विपरीत आज जिसे अफगानिस्तान कहते हैं उस क्षेत्र में प्रयुक्त आद्यकालीन ताम्र संकरों के संघटन के विषय में बहुत ही कम जानकारी है। प्रस्तुत शोधपत्र जो डा० सत्यप्रकाश की पुरातत्व रसायन के क्षेत्र में सेवाओं के उपलक्ष में प्रकाशित विशेषांक के लिये लिखा गया है अफगानिस्तान के पुरातात्विक स्थलों से प्राप्त आद्यताम्र संकरों के नमूनों के विश्लेषणों के सम्बन्ध में है। इन नमूनों को 1950-1970 की अवधि में पेन्सिल्वैनिया विश्वविद्यालय (संयुक्त राज्य अमरीका) के लुई डुप्री ने खुदाई के सम्बन्ध में की जाने वाली विविध यात्राओं के समय एकत्र किया था। ये नमूने लेखक को उन्हीं से विश्लेषण के लिये प्राप्त हुए जिसके लिये वह उनका आभारी है।

जिन नमूनों का विश्लेषण किया गया वे प्राय: संक्षारित वस्तुयें तथा वस्तुओं के खंड थे जिन्हें पूर्वी तथा दक्षिणी अफगानिस्तान की गुफाओं तथा चट्टानों आश्रयों से, जिन पर आदिवासियों तथा अन्य कबीलों का अस्थायी आधिपत्य था, एकत्र किये गये। ये वस्तुयें तथा वस्तुखंड इन कबीलों द्वारा विभिन्न समयों में या तो त्याग दी गई थीं या खोई जा चुकी थीं। इनके त्यागने या खोने की तिथियाँ स्तरीभूत निक्षेपों में उनकी गहराई से तथा संबद्ध चारकोल की रेडियोकार्बन तिथियों से ज्ञात हैं। इनमें से अधिकांश तिथियाँ अफगानिस्तान के लौह युग की हैं अर्थात् तीसरी से सातवीं सदी ईसा की। इनमें से वस्तु संख्या 4 तथा 5 इन दो की तिथियाँ कुछ बाद की हैं अर्थात् नवीं या दसवीं शती की हो सकती हैं। किन्तु इन वस्तुओं के निर्माण की मूल तिथि तथा उन धातु संकरों के निर्माण की तिथि जिनसे ये वस्तुयें बनाई

गईं निश्चित रूप से पहले की होंगी, शायद इनमें से कुछ कई सौ वर्ष पूर्व की रही हों। ये वस्तुयें या धातु संकर जिन स्थानों पर मिले हैं, वे वहीं पर निर्मित हों, यह असंभव है। सम्भव है कि इनका निर्माण अफगानिस्तान के बाहर हुआ हो।

वर्ग A : न्यून वंग कांस्य

वस्तु संख्या 1

इस वस्तु को किसी अस्त्र की नोक के रूप में पहचाना गया है। यह 33 मिमी लम्बी तथा 5 मिमी चौड़ी थी और इसका अनुप्रस्थ काट वर्गाकार था। इसका एक सिरा नुकीला था तथा दूसरा चपटा था। बाह्य संक्षारण पदार्थों में मुख्यतः क्यूप्रस आक्साइड (Cu_2O) मिला जो धातु क्रोड में भी अन्तः दानेदार संक्षारण पदार्थ के रूप में उपस्थित था। विश्लेषण के लिये क्रोड से नमूना लिया गया।

वस्तु संख्या 2

यह एक अपूर्ण नुकीले दंड के रूप में था जिसका एक सिरा टूटा हुआ और दूसरा नुकीला था। हो सकता है कि यह किसी अस्त्र का टुकड़ा या आभूषण का अंग रहा हो। इसकी लम्बाई 125 मिमी और टूटे सिरे पर इसकी मापें 8 मिमी × 6 मिमी थीं। इसका अग्रभाग 10 मिमी लम्बा था। इस वस्तु पर काई चढ़ी थी जिसके भीतर क्यूप्रस आक्साइड (Cu_2O) की पतली तह थी। संक्षारण पदार्थों को हटाकर टूटे सिरे के पास से विश्लेषण हेतु नमूने लिये गये।

वस्तु संख्या 3

यह धातु की झुर्रीदार पट्टी का एक छोटा सा टुकड़ा था जिस पर हरा हरा संक्षारण पदार्थ तथा मिट्टी लगी थी। इसका भार केवल 0.50 ग्राम था। इसे रेत कर साफ किया गया लेकिन कुछ दृढ़ता से चिपके संक्षारण पदार्थों विशेषतया आक्साइडों को नहीं विलग किया गया क्योंकि इससे धातु की काफी क्षति होती।

वस्तु संख्या 4

यह सिक्का था जिस पर हरे रंग के संक्षारण पदार्थ की समरूप तह चढ़ी थी। इसमें किसी डिजाइन का कोई पता नहीं चला। इसका व्यास 17-18 मिमी तथा भार 2.4 ग्राम था। विद्युतअपघटनी परिष्करण के बाद अस्पष्ट डिजाइन देखी गई किन्तु उसकी पहचान नहीं की जा सकी। इसके बाद रेती से साफ करके विश्लेषण हेतु दो नमूने लिये गये। सारणी 1 में दिए गये आंकड़े इन दो नमूनों से प्राप्त औसत मान के रूप में हैं।

वस्तु संख्या 5

यह एक चकती का खंड प्रतीत होता था। इसमें आभूषण की डिजाइन के अस्पष्ट संकेत दृष्टि-गोचर हो रहे थे। इसके ऊपर संक्षारण पदार्थों एवं मिट्टी की एक पतली परत चढ़ी हुई थी। इसकी लम्बाई

25 मिमी तथा अधिकतम चौड़ाई 15 मिमी थी। संक्षारण पदार्थों को रेती से रगड़ कर साफ कर लेने के बाद विश्लेषण हेतु 2 नमूने लिये गये। सारणी 1 में दिये हुये मान इन दो नमूनों के औसत मान हैं।

वर्ग B : उच्च वंग कांस्य

वस्तु संख्या 1

यह किसी पात्र या अन्य अर्धगोलाकार वस्तु का ऊपर उठा-पिचका खंड था। इसकी लम्बाई 35 मिमी, अधिकतम चौड़ाई 15 मिमी तथा मोटाई लगभग 1 मिमी थी। इस वस्तुखंड के ऊपर संक्षारण पदार्थों की एक भूरी तह, जो मुख्यतः क्यूप्रस आक्साइड (Cu_2O) था, चढ़ी थी। इस तह को रेती से साफ करने के बाद स्वच्छ टुकड़े को दो अर्धछडों में काट लिया गया। यद्यपि इनमें क्यूप्रस आक्साइड उपस्थित था किन्तु उसे विलग कर पाना सम्भव नहीं हो सका।

वस्तु संख्या 2

यह किसी चपटी वृत्ताकार वस्तु का खंड था जो दो भागों में टूटा था। सम्पूर्ण वस्तु सम्भवतः कोई दर्पण रहा होगा। दोनों खण्डों को जोड़ने पर रिम की लम्बाई 50 मिमी थी। इस खंड पर महीन मिट्टी की पतली पर्त चढ़ी थी और यह इतनी बुरी तरह से संक्षारित था कि धातु क्रोड नहीं बचा था। मिट्टी को साफ करने के बाद एक खण्ड में से विश्लेषण हेतु नमूने लिये गये।

वस्तु संख्या 3

यह किसी पात्र या अन्य अर्धगोलाकार वस्तु का ऊपर उठा-पिचका खंड था। इसकी लम्बाई 40 मिमी, चौड़ाई 30 मिमी तथा मोटाई 2 मिमी थी। इस वस्तु के ऊपर खुरदुरे गहरे भूरे रंग की एक तह चढ़ी हुई थी जिसके नीचे संक्षारण पदार्थों का एक हरा स्तर था। विश्लेषण के लिये इसमें से नमूना काट लिया गया और उसके वाह्य संक्षारण पदार्थों को रेत कर निकाल दिया गया। स्वच्छ किये गये नमूने कुछ कुछ भंगुर थे। विभंगों के फलकों पर उच्च मात्रा में धातु आक्साइडों के रहने के कारण लाल अधात्विक चमक थी। विश्लेषण नमूनों में से इन आक्साइडों को विलग कर पाना सम्भव नहीं हो सका।

वर्ग C : पीतल

वस्तु संख्या 1

यह चद्दर धातु का टूटा तथा कुछ-कुछ चपटा पोला शंकु था जिसकी लम्बाई 52 मिमी, अधार पर चौड़ाई 20 मिमी तथा शीर्ष पर 10 मिमी चौड़ा था। इसे लकड़ी के लट्ठे के सिरे पर छल्ले के रूप में प्रयुक्त किया जाता रहा होगा या यदि यह सम्पूर्ण शंकु रहा होगा तो किसी भाले की नोक रहा होगा। इस वस्तु के भीतर मिट्टी भरी थी और धातु पर हरे रंग के संक्षारण पदार्थों की पतली तह चढ़ी थी जिसके नीचे क्यूप्रस आक्साइड (Cu_2O) की पतली परत थी। मिट्टी तथा संक्षारण पदार्थों के हटाने के बाद धातु को काट कर नमूने लिये गये जो कहीं-कहीं पर भंगुर थे।

वस्तु संख्या 2

यह किसी अत्यन्त पतली चद्दर धातु का एक खंड था जो कुछ-कुछ संक्षारित था और दो भागों में टूटा था जिन्हें जोड़ने पर चपटी मुँदरी का चतुर्थांश प्राप्त हुआ। इन जुड़े हुये भागों के बाहर-बाहर की लम्बाई 35 मिमी और चौड़ाई समान रूप से 7 मिमी थी। इस खंड का भार 0.74 ग्राम था। सफाई करने के बाद इसे समग्र रूप में विश्लेषण के लिये प्रयुक्त किया गया।

परिणाम

विश्लेषण से प्राप्त आँकड़े सारणी 1,2 तथा 3 में दिये गये हैं। साथ ही धातु संकरों का परिगणित मूल संघटन भी दिया है। सारणी में प्रथम पंक्ति में विश्लेषण से प्राप्त प्रतिशत मान हैं किन्तु दूसरी पंक्ति में मूल असंक्षारित धातु संकरों के परिगणित प्रतिशत मान हैं। 'अन्य' शीर्षक के अन्तर्गत या तो विश्लेषण की त्रुटियाँ हैं तथा अनिर्धारित तत्व हैं जिनमें धातु आक्साइडों में विद्यमान आक्सीजन मुख्य है। यद्यपि हमने परिगणन के लिये जिस विधि का प्रश्रय लिया है उसमें कुछ त्रुटि हो सकती है क्योंकि मिट्टी में गड़े रहने पर इन वस्तुओं में से कुछ संक्षारण पदार्थ दूर चले जा सकते हैं किन्तु तो भी यह त्रुटि नगण्य है क्योंकि हमने ठोस क्रोडों से ही विश्लेषण के लिये नमूने लिये हैं। जो भी हो, परिगणित प्रतिशततायें मूल धातु संकरों की वास्तविक प्रतिशतताओं के अत्यधिक निकट हैं।

विवेचना

सारणी 1 से प्रत्यक्ष है कि वर्ग A की वस्तु संख्या 1, 2 तथा 3 के प्रमुख तथा गौण घटकों का अनुपात प्राचीन न्यून-वर्ग कांस्यों के लिये असामान्य नहीं है। अपवादस्वरूप वस्तु संख्या 1 में वंग की अतिन्यून मात्रा तथा वस्तु संख्या 3 में निकेल की अनुपस्थिति है। वस्तु संख्या 4 तथा विशेष रूप से वस्तु संख्या 5 में सीसे का अनुपात असामान्यतः उच्च है। ऐसे अनुपात इंगित करते हैं कि इन कांस्यों का निर्माण बाद में हुआ जो पुरातात्विक प्रमाणों के सर्वथा अनुरूप है। वस्तु संख्या 4 तथा 5 में वस्तु संख्या 1, 2 तथा 3 की तुलना में गौण घटकों का अनुपात तथा उनकी प्रकृति सर्वथा भिन्न है। यह इस बात का स्पष्ट संकेत है कि ताम्र या सीसा अथवा दोनों के उत्पादन में विभिन्न प्रकार के अयस्कों का प्रगलन किया गया।

सारणी 2 से स्पष्ट है कि वर्ग B के धातु संकरों में वंग की मात्रा अत्यधिक विचरण प्रदर्शित करती है, विशेष रूप से वस्तु संख्या 3 में वंग की अत्युच्च मात्रा है। वस्तु संख्या 1 तथा 3 में प्राप्त गंधक मूलतः धातु संकरों में था अथवा नहीं, यह निश्चित नहीं है। सम्भव है कि सल्फाइड से युक्त भौम जल के च्यावन के फलस्वरूप संक्षारण पदार्थों में गंधक मिल गया हो। उच्च वंग संकरों की भंगुरता एवं कठोरता के कारण वस्तुयें ढाल करके तैयार की जा सकी होंगी।

सारणी 3 से प्रदर्शित होता है कि वर्ग C के दोनों पीतलों के संघटन भिन्न-भिन्न हैं। वस्तु 1 का संघटन ऐसा है जो प्राचीन पीतल में प्रायः पाया जाता है लेकिन वस्तु 2 में अत्यधिक सीसा है जो असामान्य है। इन दोनों धातु संकरों से वंग की अनुपस्थिति भी एक असामान्य घटना है।

ऊपसंहार

इस प्रपत्र में दिये गये विश्लेषण बताते हैं कि आद्य अफगानिस्तान में विभिन्न प्रकार के ताम्र-संकर का व्यवहार होता था। लेकिन इतने कम विश्लेषण इस क्षेत्र के आद्य ताम्र संकरों के संघटन का वास्तविक प्रतिनिधित्व नहीं कर सकते क्योंकि इनमें से एक भी वस्तु में वंग की पर्याप्त मात्रा नहीं पाई गई जो सामान्यतः प्राचीन प्रकार के धातु संकरों में पाई जाती है। साथ ही, यह भी निश्चित नहीं हो सकता कि इनमें से कोई भी धातु संकर लौह युग के पहले तैयार हुये थे। किसी व्यापक निष्कर्ष पर पहुँचने के लिये वस्तुओं तथा खंडों को काफी बड़ी संख्या तथा विभिन्न कालों का होना अनिवार्य है।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 3, July, 1980, Pages - 223-233

CHEMICAL COMPOSITION OF SOME EARLY COPPER ALLOYS FOUND IN AFGHANISTAN

By

Earle R. Caley

Professor Emeritus of Chemistry,
The Ohio State University, Columbus, Ohio, U. S. A.

Abstract

The present paper contains analysis of some samples of early copper alloys found at Archaeological sites in Afghanistan during 1950-70.

The many analyses listed in the tables published by Satya Prakash and N. S. Rawat[1] show that much is known about the chemical composition of the copper alloys used in ancient India. In contrast, very little is known about the composition of those used in early times in the region now known as Afghanistan. This present paper, written in honor of the achievements of Dr. Satya Prakash in the field of archaeological chemistry, contains analyses of some examples of early copper alloys found at archaeological sites in that region. Louis Dupree of the American Universities Field Staff and Adjunct Professor of Anthropology, Pennsylvania State Universities, U. S. A., collected these examples in the course of his explorations and excavations in Afghanistan conducted at various times in the period 1950-1970. The writer is indebted to Professor Dupree for providing these examples for analysis.

The more or less corroded objects and fragments of objects that were analyzed came from caves and rock shelters in eastern and southern Afghanistan that has been temporarily occupied by bands of nomads and other small groups. These objects and fragments had been discarded or lost by individuals of these groups at various times. The dates of their discard or loss are approximately known from the depths of burial in stratified deposits and from the radiocarbon dates of associated charcoal. Most of these dates fall in the iron age period for Afghanistan, that is from the third to seventh centuries A. D. The dates for two of the objects designated as Nos. 4 and 5 of the low-tin bronzes, are a little later, ninth or tenth century A. D. However, the dates of manufacture of the original objects, and especially the dates of manufacture

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 3, July, 1980, Pages - 223-233

CHEMICAL COMPOSITION OF SOME EARLY COPPER ALLOYS FOUND IN AFGHANISTAN

By

Earle R. Caley

Professor Emeritus of Chemistry,
The Ohio State University, Columbus, Ohio, U. S. A.

Abstract

The present paper contains analysis of some samples of early copper alloys found at Archaeological sites in Afghanistan during 1950-70.

The many analyses listed in the tables published by Satya Prakash and N. S. Rawat[1] show that much is known about the chemical composition of the copper alloys used in ancient India. In contrast, very little is known about the composition of those used in early times in the region now known as Afghanistan. This present paper, written in honor of the achievements of Dr. Satya Prakash in the field of archaeological chemistry, contains analyses of some examples of early copper alloys found at archaeological sites in that region. Louis Dupree of the American Universities Field Staff and Adjunct Professor of Anthropology, Pennsylvania State Universities, U. S. A., collected these examples in the course of his explorations and excavations in Afghanistan conducted at various times in the period 1950-1970. The writer is indebted to Professor Dupree for providing these examples for analysis.

The more or less corroded objects and fragments of objects that were analyzed came from caves and rock shelters in eastern and southern Afghanistan that has been temporarily occupied by bands of nomads and other small groups. These objects and fragments had been discarded or lost by individuals of these groups at various times. The dates of their discard or loss are approximately known from the depths of burial in stratified deposits and from the radiocarbon dates of associated charcoal. Most of these dates fall in the iron age period for Afghanistan, that is from the third to seventh centuries A. D. The dates for two of the objects designated as Nos. 4 and 5 of the low-tin bronzes, are a little later, ninth or tenth century A. D. However, the dates of manufacture of the original objects, and especially the dates of manufacture

of the alloys of which they are composed, must have been earlier than the dates of deposition, possibly even centuries earlier for some of them. That these objects or alloys were manufactured on the sites where they were found is very improbable. Their manufacture outside the present boundaries of Afghanistan is by no means unlikely.

The methods of sampling for analysis are explained in the descriptions of the individual objects. Since the analytical procedure that were used have been described in full detail elsewhere[2], they need not be repeated here. On the basis of chemical composition as determined by analysis these objects fall into three distinct groups.

Group A. Low-Tin Bronzes

No. 1. This object was identified as a projectile point. It was 23 mm. long, had a square cross section, and a width of 5 mm. One end was pointed and the other end was flat. The exterior corrosion products consisted mainly of cuprous oxide (Cu_2O) which was also present as an intergranular corrosion product in the metal core. Analytical samples were prepared from the core.

No. 2. This incomplete object was in the form of a tapered rod broken off at one end and having a conical tip at the other. It may have been part of a weapon tip or ornamental spike. Its length was 125 mm. and its dimensions at the broken end were 8 mm. by 6 mm. The tip was 10mm. in length. This object was coated with a rough green patina under which was a thin layer of cuprous oxide (Cu_2O). The samples for analysis were taken from near the broken end after filing off the corrosion products. Only small amounts of intergranular corrosion products were visible in the core.

No. 3. This was a small fragment of crumpled sheet metal coated with greenish corrosion products and loess. Its weight was only 0.50 gram. It was cleaned by filing and scraping, but some of the strongly adherent corrosion products, mostly oxides, were not removed because this would have caused so much loss of metal that an analytical sample of sufficient size could not have been obtained.

No. 4. This was a coin coated with a uniform layer of green corrosion products. No trace of a design was visible. Its diameter varied from 17 to 18 mm. and it weighed 2.4 grams. After electrolytic cleaning, parts of a crude design could be seen, but not enough was visible for identification. After further cleaning with a file two samples were taken for analysis. The figures shown in Table 1 are averages of duplicate determinations.

No. 5. This appeared to be a segment of a disc. Faint traces of an ornamental design were visible. The object was coated with a thin layer of corrosion

products and loess. Its length was 25 mm. and its maximum width 15 mm. After cleaning off the corrosion products by filing and scraping two samples were taken for analysis. The figures shown in Table 1 are averages of duplicate determinations.

Group B. High-Tin Bronzes

No. 1. This was a concavo-convex fragment, probably from a bowl or other hemispherical object. It was 35 mm. long, had a maximum width of 15 mm., and was about 1 mm. thick. This fragment was coated with a dark brown layer of corrosion products, most of which was cuprous oxide (Cu_2O). After removal of these corrosion products by filing and scraping the cleaned fragment was cut in half to obtain the analytical samples. Some cuprous oxide was present in these samples as an intergranular corrosion product, but it was not found practicable to remove this admixed oxide.

No. 2. This was a fragment, broken into two pieces, from the edge of a flat circular object having a thickened rim. The complete object was probably a mirror. The length of the two joined pieces measured along the rim was 50 mm. This fragment was coated with a thin layer of loess, and was so deeply corroded that no metal core remained. After cleaning off the loess, samples for analysis were broken off from one of the pieces.

No. 3. This was a concavo-convex fragment, probably from a bowl or other hemispherical object. It measured 40 mm. by 30 mm. and was about 2 mm. thick. This fragment was coated with a rough dark brown layer of corrosion products underlain by a layer of green corrosion products. Samples for analysis were cut from the fragment, and the exterior corrosion products were removed by filing. These cleaned pieces were somewhat brittle. The faces of fractures had reddish nonmetallic appearance due to the presence of metal oxides in high proportion. Removal of these oxides from the analytical sample was not practicable.

Group C. Brasses

No. 1. This object was a truncated and slightly flattened hollow cone of sheet metal, 52 mm. long, 20 mm. wide across the base, and 10 mm. wide across the top. It may have been used as a ferrule at the end of a wooden rod, or if it was originally a complete cone, as the tip of a wooden spear. The interior of this object was filled with loess, and the metal was coated with a thin layer of greenish corrosion products underlain with a thin layer of cuprous oxide (Cu_2O). After removal of the loess and corrosion products, samples for analysis were cut from the cleaned metal, which was brittle in some places because of intergranular corrosion.

No.2 This was a slightly corroded fragment of very thin sheet metal that had broken into two pieces. When joined these two pieces constituted one quarter of a flattened ring. The joined pieces measured 35 mm. around the outer side and had a uniform width of 7 mm. This fragment weighed only 0.74 gram. After cleaning, all of it was used as the analytical sample.

The Analytical Data

Listed in Tables 1, 2, and 3 are the results of the analyses and the calculated original composition of the alloys. The first line of figures in each pair of rows are the percentages found by analysis and the second line shows the percentages calculated for the original uncorroded alloys. Those listed under the heading "other" are in smaller part the accumulated errors of the analyses and in larger part the sums of undetermined elements, principally oxygen present in metal oxides. The calculated percentages were found by prorating the percentages for each determined element over a range of 100 percent. Although this method of calculation is subject to some error because of possible selective migration of corossion products away from objects during burial, this error is probably small for this particular group of objects because the analytical samples were taken from solid cores. At any rate, these calculated percentages are probably nearer to the actual percentages for the composition of the original alloys than those found by analysis.

Comments on the Composition of the Alloys

From Table 1 it will be seen that the proportions of the major and minor components of Nos. 1, 2, and 3 of Group A are not unusual for ancient low-tin bronzes, except perhaps for the very low tin content of No. 1 and the absence of nickel from No. 3. No. 4 and especially No. 5 contain unusually high proportions of lead. Such proportions indicate a late date of manufacture, which is in accordance with the archaeological evidence. The nature and proportions of the minor components in Nos. 4 and 5 are distinctly different from those in Nos. 1, 2, and 3. This is a clear indication of the smelting of different kinds of ores for obtaining the copper, lead, or both used in the manufacture of these two sets of alloys.

As is shown in Table 2, the tin content of the alloys of Group B varies considerably, that of No. 3 being unusually high. Whether the sulfur found in Nos. 1 and 3 was present in the original alloys is uncertain. This element may have been introduced into the corrosion products of these alloys by percolating ground water containing sulfide. Because of the brittleness and hardness of these high-tin alloys the objects made from them could have been formed only by casting.

Table I

सारणी 1

Analysis of Low-Tin Bronzes

वंग न्यून कांस्यों के विश्लेषण

No. क्रमांक	Cu %	Sn %	Pb %	Fe %	Ni %	Co %	Zn %	Ag %	Others अन्य %
1	91.59	2.86	0.27	0.05	0.23	...	...	0.04	4.96
1a	96.37	3.01	0.29	0.05	0.24	...	...	0.04	
2	90.44	5.23	2.56	0.17	0.08	...	...	0,08	1.44
2a	91.76	5.31	2.60	0.17	0.08	...	,..	0.08	
3	82.44	4.46	7.15	0.42	...	...	...	...	5.53
3a	87.27	4.72	7.57	0.44	...	...	...	...	
4	76.97	5.77	15.05	0.09	0.13	0.06	0.17	0.14	1.62
4a	78.24	5.87	15.30	0.09	0.13	0.06	0.17	0.14	
5	65.88	3.33	26.91	0.51	0.11	0.13	0.70	0.21	2.22
5a	67.38	3.41	27.52	0.52	0.11	0.13	0.72	0.21	

Table 2

सारणी 2

Analyses of High-Tin Bronzes

उच्च वंग कांस्यों के विश्लेषण

No. क्रमांक	Cu %	Sn %	Pb %	Fe %	Ni %	Zn %	S %	Others अन्य %
1	67.27	20.25	3.84	0.07	0.06	1.33	0.12	7.06
1a	72.47	21.82	4.14	0.08	0.06	1.43		
2	56.32	18.94	0.01	0.01	0.01	...	...	24.71
2a	74.82	25.15	0.01	0.01	0.01	...	...	
3	61.78	25.97	...	0.11	0.13	0.08	0.25	11.68
3a	69.95	29.40	...	0.13	0.15	0.09	0.28	

Table 3

सारणी 3

Analyses of Brasses

पीतलों के विश्लेषण

No. क्रमांक	Cu	Sn	Pb	Fe	Ni	Zn	Ag	S	Others अन्य
	%	%	%	%	%	%	%	%	%
1	77.71	...	0.14	0.27	...	18.87	0.18	0.05	2.78
1a	79.93	...	0.14	0.28	...	19.41	0.19	0.05	
2	72.38	...	15.08	0.42	0.17	11.21	0.32	...	0.42
2a	72.69	...	15.14	0.42	0.17	11.26	0.32	...	

Table 3 shows that the two brasses of Group C have distinctly different compositions. No. 1 has the type of composition often found in ancient brass, but No. 2 is a highly leaded brass, which is very unusual. Also unusual is the absence of tin from both these alloys.

Concluding Remarks

The analyses reported in this paper show that a wide variety of copper alloys were in use in early Afghanistan. However the few analyses cannot be truly representative of the composition of the early copper alloys of this region, for none of the objects and fragments were found to be composed of bronze of moderate tin content, which is generally the most common ancient type. Moreover, it is not certain that any of the alloys were manufactured before the iron age. Analyses of a considerable number of objects and fragments that range widely in date are needed before any general conclusion can be reached about the composition of the copper alloys used in early Afghanistan.

REFERENCES

1. Chemical Study of some Indian Archaeological Antiquities, State Council of Scientific and Industrial Research, U. P. Lucknow, Monograph Number Ten, Asia Publishing House, Bombay, 1965, Chapter V.
2. Caley, E. R., Analysis of Ancient Metals, The macmillan Company, New York, 1964, pp. 81-90.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 3, July 1980, Pages 235-247

आद्य भारतीय आर्सेनिकीय ताम्र

एच० सी० भारद्वाज
प्राचीन भारतीय इतिहास एवं संस्कृति तथा पुरातत्व विभाग
बनारस हिन्दू विश्वविद्यालय, वाराणसी

[प्राप्त—जनवरी 15, 1980]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में जिन तथ्यों को प्रकट किया गया है, वे हैं

1. भारत में आर्सेनिक-ताम्र संकरों के उत्पादन में प्रयुक्त सम्भाव्य कच्चा पदार्थ
2. ताम्र के साथ आर्सेनिक के धातुसंकरण से होने वाले लाभ
3. आर्सेनिक-ताम्र संकरों तथा वंग कांस्यों के यांत्रिक गुणधर्मों की तुलना
4. धातुसंकरों के संघटन का नियन्त्रण
5. हडप्पा तथा ताम्र होर्ड (आसंचन) आर्सेनिकीय संकरों के मध्य सम्बन्ध ।

ताम्र का सबसे पहला उपयोग लगभग 6500 ई० पू० दक्षिणी पश्चिमी ईरान में हुआ, ताम्र प्रगलन की सूचना किर्मान श्रेणी में ताल-ई-इब्लिस से 4000 ई० पू० के लगभग प्राप्त होती है। ईरान तथा मेसोपोटामिया में चतुर्थ सहस्राब्दि ई० पू० ताम्र के बने पदार्थों की विभिन्न कोटियों का प्रगलन किया जाता था। इसी अवधि में आर्सेनिकयुक्त धातुसंकरण तथा वंग धातुसंकरण का भी प्रचलन था। आर्सेनिकीय ताम्र के प्रयोग का पता मध्य यूरप तथा ईजियन पूर्व कांस्य युग[1] में भी चलता है। मिस्र से भी कतिपय आद्या ताम्रों में 56% आर्सेनिक की सूचना प्राप्त है।[2] काकेशस क्षेत्र से प्राप्त अनेक प्राचीन ताम्रों में ताम्र-आर्सेनिक संकरण पाया गया है जिनमें आर्सेनिक की प्रतिशतता 10% तक है।[3]

यह स्पष्ट नहीं हो पाया कि ताम्र धातुकर्म स्वंतत्र रूप से भारत में विकसित हुआ अथवा पश्चिम से यहाँ आया। साथ ही भारत में धातुकर्म का कोई निश्चित क्रम नहीं पाया जाता। चाहे टेक्नालाजी की दृष्टि से देखें, चाहे टाइपोलाजी की दृष्टि से, आद्य ताम्र-कांस्य सभ्यताओं में, जिनका काल ईसा पूर्व

दूसरी-तीसरी सहस्राब्दि है चाहे हडप्पा, चैल्कोलिथिक तथा ताम्र आसंचय हो, अनमेल चित्र प्रस्तुत करती हैं। 1965 में लेखक[4] ने इंगित किया था कि हडप्पा से प्राप्त ताम्र में वंग को जानबूझ कर मिलाया गया। यह आकस्मिक घटना नहीं है जैसा कि रे[5] ने माना है। हाल ही में अग्रवाल[6] ने ताम्र आसंचयों के ताम्र नमूनों में आर्सेनिक की उपस्थिति सूचित की है। अतः वह निष्कर्ष निकाला जा सकता है कि ताम्र के साथ आर्सेनिक का धातुसंकरण एक विश्वव्यापी घटना थी जिसे जानबूझकर प्रयोग किया जा रहा था और जिसके कुछ गुण रहे होंगे।

प्रस्तुत निबन्ध में निम्नलिखित के सम्बन्ध में विवेचना की जावेगी;

1. भारत में आर्सेनिक-ताम्र संकरों के उत्पादन में प्रयुक्त सम्भाव्य कच्चा पदार्थ
2. ताम्र के साथ आर्सेनिक के धातु संकरण से होने वाले लाभ
3. आर्सेनिक-ताम्र संकरों तथा वंग कांस्यों के यांत्रिक गुणधर्मों की तुलना
4. धातु संकरों के संघटन का नियन्त्रण
5. हडप्पा तथा ताम्र आसंचय आर्सेनिकीय संकरों के मध्य सम्बन्ध।

. सम्भाव्य कच्चा पदार्थ तथा आर्सेनिक-ताम्र संकरों का उत्पादन

आर्सेनिक के स्रोत

(अ) आर्सेनिक प्राकृत तथा मिश्रित, इस समय आर्सेनिक प्राकृत रूप में विरले ही पाया जाता है किन्तु इसमें सन्देह नहीं कि पुराकाल में इसकी प्रचुर मात्रायें उपलब्ध थीं और यह आद्य प्रगलनकर्ताओं द्वारा प्रयुक्त होती थीं। प्राकृत रूप में यह ऐंटीमनी, सीसा, रजत, निकेल, कोबाल्ट तथा ताम्र के साथ पाया जाता है। ईरान की तुलामेसी खानों से Cu_5As (ऐल्गोडोनाइट) तथा Cu_3As (डोमेकाइट) के रूप में इसकी उपस्थिति सूचित की गई है जो आद्य आर्सेनिकीय ताम्र के प्रसंग में विशेष रूप से सूचनाप्रद है।

(आ) आक्साइड: आर्सेनोलाइट, श्वेत आर्सेनिक, As_2O_3

(इ) सल्फ आर्सेनाइड: मिसपिकेल, आर्सेनोपाइराइट $FeAsS$

(ई) आर्सेनाइड: क्लोऐन्थाइट $NiAs_2$; लोलिंगाइट $FeAs_2$

(उ) आर्सेनेट: आलिविनाइट $Cu_3As_2O_8Cu(OH)_2$

(ऊ) सल्फआर्सेनेट: एनार्गाइट Cu_3AsS_4

(ए) सल्फआर्सेनाइट: टेन्नान्टाइट $(Cu, Fe)_{12}As_4S_{13}$

(ऐ) सल्फाइड: आर्पीमेंट As_2S_3; रियल्गर As_2S_2

आर्सेनिक का निष्कर्षण तथा आर्सेनिकीय ताम्र का निर्माण

यद्यपि ताम्र का निष्कर्षण बहुत पहले (4000 ई० पू०) सम्पन्न हो चुका था लेकिन उपकरणों, प्रौद्योगिक कुशलता एवं रासायनिक ज्ञान के अभाव में यह वाष्पशील एवं विषैली धातु प्राचीन काल में निष्कर्षित न की जा सकी।

आर्सेनिक के निष्कर्षण एवं आर्सेनिक-ताम्र संकरों के उत्पादन के सम्बन्ध में तीन सम्भावनाएं हैं:

1. आर्सेनिक प्राकृत रूप में मिलता है किन्तु अत्यन्त विरल रूप में। इसका प्रमाण है कि एक छल्ला तथा एक शलाका—ये दो लघु पदार्थ कुम्बुल्टे[7] से प्राप्त हुए हैं। बहुत सम्भव है कि आर्सेनिकीय धातुसंकर तैयार करने के लिये पिघले ताम्र में प्राकृत आर्सेनिक मिला दिया जाता रहा हो।

2. सम्भव है कि जैसा कि तुलामेसी से एल्गोडोनाइट तथा डोमेकाइट जैसे आर्सेनिक के खनिजों की सूचना है, ईरान तथा पास के क्षेत्रों में प्रारम्भिक आर्सेनिक ताम्रों के उत्पादन में इन खनिजों का उपयोग किया जाता रहा हो।

3. यह भी सम्भव है कि आर्सेनिकीय ताम्रों के लिये आर्सेनिक की प्राप्ति ताम्र तथा आर्सेनिक के खनिजों को एकसाथ मिलाकर प्रगलन द्वारा की जाती रही हो। यद्यपि इस प्रकार से ताम्र-आर्सेनिक संकर तो प्राप्त हो सकेंगे किन्तु आर्सेनिक की प्रतिशतता को बांछित स्तर पर बनाये रखना दुष्कर होगा। आर्सेनिक का क्वथनांक 616° से० तथा ताम्र का गलनांक 1083° से० है अतः जब आर्सेनिक तथा ताम्र को एकसाथ प्रगलित किया जावेगा तो इस प्रकार प्राप्त द्रव का वाष्प दाब उच्च होने से आर्सेनिक की क्षति सम्भावित है।

प्रारम्भिक भारतीय आर्सेनिकीय ताम्र का स्रोत

आर्सेनिक के सल्फाइड अयस्क, यथा रियल्गर (As_2S_2) तथा आर्पीमेंट (As_2S_3) चित्राल में जो अब पाकिस्तान में है, पाये जाते हैं। आर्सेनिकीय पाइराइट पश्चिमी बंगाल के दार्जिलिंग जिले के कैलिम्पोंग सबडिवीजन में सम्पथार पहाडी में तथा लोह पाइराइट बिहार में हजारीबाग जिले के अभ्रकवाही पेग्मैटाइटों में पाये जाते हैं किन्तु आर्थिक दृष्टि से अधिक महत्वपूर्ण नहीं हैं। ऐसा लगता है कि कतिपय ऐसे ताम्र अयस्कों के आकस्मिक प्रगलन के समय, जिनमें आर्सेनिक प्राकृतिक अशुद्धि के रूप में था, सर्वप्रथम आर्सेनिक उपस्थित पाया गया। इसकी पुष्टि मोहनजोदडो से प्राप्त ताम्र अयस्क के विश्लेषण से होती है (देखें सारणी 1)।

जब एक बार ताम्र संकरों में आर्सेनिक की उपस्थिति से लाभप्रद परिणाम प्राप्त हुये तो आर्सेनिकीय ताम्र का उत्पादन जानबूझ कर किया जाने लगा। बहुत सम्भावना है कि या तो एनार्गाइट तथा टेन्नाटाइट जैसे ताम्र-आर्सेनिक के मिश्रित खनिजों को साथ साथ प्रगलित किया जाता अथवा प्रगलन मिश्रण में लोलिंगाइट, आर्पीमेन्ट या रियल्गर जैसे ताम्रविहीन फेरस आर्सेनिक अयस्क ऊपर से मिला दिये जाते। इस दिशा में रंग, द्युति तथा स्पर्श जैसे गुणधर्म सहायक हुये होंगे क्योंकि टेन्नान्टाइट में धात्विक द्युति होती है और वह श्याम-भूरा होता है तथा आर्पीमेंट और रियल्गर अत्यधिक रंगीन होते हैं। इस प्रसंग में यह उल्लेखनीय है कि मोहनजोदडो की खुदाई में लोलिंगाइट ($FeAs_2$) प्राप्त हुआ है जो आर्सेनिक का स्रोत रहा होगा। चूँकि भारत में कहीं से भी टेन्नान्टाइट तथा एनार्गाइट नहीं मिले अतः इनके प्रयोग के सम्भव में कोई अनुमान नहीं लगाया जा सकता।

यह भी सम्भावना है कि आर्सेनिक रजत श्वेत रंग का होते के कारण हाथ से चुना जाता रहा हो और पिघले ताम्र में जानबूझ कर मिला दिया जाता रहा हो जिससे ताम्र-आर्सेनिक संकर बने किन्तु इन धातु-संकरों में आर्सेनिक के असमान वितरण के करण ऐसी सम्भावना नहीं उठती । इसमें आश्चर्य नहीं कि प्राचीन संस्कृतियों में परस्पर प्राकृत आर्सेनिक या आर्सेनिक के अयस्कों का व्यापार होता रहा हो ।

II. आर्सेनिकीय धातुमिश्रणन के लाभ

धातुओं के प्रमुख यांत्रिक गुण हैं उनकी शक्ति, आघातवर्ध्यता, कठोरता एवं भंगुरता । पिघला ताम्र मृदु होता है और इस अवस्था में यह पात्रों के बनाने के उपयुक्त होता है लेकिन कर्तन औजारों के लिए सर्वथा अनुपयुक्त होगा । हथौड़े से पीटकर ताम्र को कठोर बनाये जाने का पता बहुत पहले ही कारीगरों को लग गया रहा होगा लेकिन विशुद्ध ताम्र को थोड़ा भी कठोर करने पर भंगुर हो जाता है । यही नहीं प्रारम्भ में पिघले हुये ताम्र में आक्सीजन की पर्याप्त मात्रा घुली रहती थी, जो ठोसीकरण पर विमुक्त नहीं होती थी वरन् Cu_2O के रूप में विलग हो जाती थी जिससे ताम्र की तन्यता घट जाती थी और इसे ठंडी अवस्था में ठीक से प्रयुक्त नहीं किया जा सकता था ।

तन्यता में इस प्रकार के ह्रास पर प्रारम्भिक प्रगलनकर्ताओं ने आर्सेनिकीय धातुसंकरण की युक्ति द्वारा विजय प्राप्त की । 7% तक आर्सेनिक मिलाने से ताम्र की तन्यता एवं कठोरता में उल्लेखनीय वृद्धि होती है । ऐसा धातुसंकर विदीर्ण हुये बिना उष्ण तथा शीत अवस्थाओं में पीटा जा सकता है । दूसरे यह कि आर्सेनिक विआक्सीकारक होता है अतः प्रारम्भिक ताम्रों में इसकी उपस्थिति या इसका मिश्रण घुली हुई आक्सीजन को विलग करने में सहायक होता है । आक्सीजन के साथ अभिक्रिया करके आर्सेनियस आक्साइड बनाता है जो ताम्र में अविलेय है अतः द्रव धातु में से ऊर्ध्वपातज के रूप में पृथक हो जाता है । यदि ताम्र के ठोसीकरण प्रक्रम के समय ताम्र आक्साइड बनता भी है तो विद्यमान आर्लेनिक इस हानिकारक ताम्र आक्साइड को ताम्र में अपचित कर देता है ।

चूँकि आर्सेनिक ताम्र संकर काफी कठोर बनाये जा सकते थे अतः इनका प्रयोग कर्तन औजारों के ढालने में अत्यन्त उपयोगी रहा होगा । विशुद्ध ढलवाँ ताम्र की कठोरता 35-40 ब्रिनेल तथा निम्न आर्सेनिक युक्त ढलवाँ ताम्र की कठोरता 79 ब्रिनेल होती है जबकि आर्सेनिकीय ताम्र की कठोरता 132 ब्रिनेल तक जाती है । आर्सेनिक की मात्रा क्रमशः 7% तक बढाने एवं उसके साथ ही कठोर करने से इसकी कठोरता 200 ब्रिनेल से भी ऊपर अधिक बढ़ाई जा सकती है ।

III. आर्सेनिकीय ताम्र तथा वंग कांस्यों के यांत्रिक गुणधर्मों की तुलना

यद्यपि आर्सेनिक-ताम्र ताथा वंग कांस्य दोनों ही 4000 ई० पू० तैयार हो चुके थे किन्तु वंग कांस्यों का ही अधिक प्रचलन था । ऐसा टिन कांस्यों की मूलभूत श्रेष्ठताओं के कारण था अथवा इसका कोई अन्य कारण था ? ताम्र में आर्सेनिक की अधिकतम विलेयता 8% है जो ताप बढ़ाने पर नहीं बढ़ती । वंग कांस्यों में ताम्र में वंग की विलेयता ताप के साथ 15% से घट कर कमरे के ताप पर अत्यल्प हो जाती है । दोनों ही दशाओं में α-प्रावस्था (आघातवर्ध्य) पर संकरण करने से कठोरता बढ़ती है । लेकिन वंग कांस्यों में

600°—200° से के परास में बारम्बार गरम करने तथा ठंढा करने से भंगुर δ या ε प्रावस्था विलग हो जाती है। इससे कार्य कुशलता में बाधा पड़ती है फलतः α-प्रावस्था वंग कांस्य को ही कठोर किया जा सकता है। इसके विपरीत α-प्रावस्था के कारण आर्सेनिकीय धातु संकर अत्यन्त उपयोगी होते हैं। इस प्रकार आर्सेनिकीय ताम्रों से बनी वस्तुओं को उनके भंगुर होने के भय के बिना कठोर किया जा सकता है। इस प्रकार यांत्रिक गुणों में आर्सेनिक कांस्य वंग कांस्यों की अपेक्षा उत्तम है।

विआक्सीकारकों के रूप में वंग तथा आर्सेनिक

जब पिघले ताम्र में (जिसमें विलयित ताम्र आक्साइड रहता है) वंग उपस्थित रहता है तो वह ताम्र आक्साइड से अभिक्रिया करके वंग आक्साइड बनाता है जो अविलेय होने के कारण निलम्बित अवस्था में रहा जाता है। फलतः ऐसे कांस्य दुर्बल तथा रंध्रमय होते हैं। इस मामले में आर्सेनिक के संकर श्रेष्ठ होते हैं।

सम्भव है कि वंग कांस्यों में आर्सेनिकीय संकरों से बढ़ कर कोई प्रौद्योगिक श्रेष्ठता न होती हो किन्तु वंग कांस्यों की लोकप्रियता का कारण उनका सरलता से प्रगलन, अपक्षेतया निम्नतर गलनांक एवं सुगम ढलाई है। वंग कांस्यों के संघटन को समान रखना आसान है जबकि आर्सेनिक की वाष्पशीलता के कारण आर्सेनिकीय कांस्यों का संघटन इच्छानुसार स्थिर नहीं रखा जा सकता। आर्सेनिक की परम विषाक्तता ने भी कर्मियों को इनके उपयोग से विरत किया होगा।

IV. धातु संकरों के संघटनों पर नियंत्रण

ताम्र की हजारों वस्तुओं का विश्लेषण हो चुका है जिनमें से अधिकांश में 1% से भी कम आर्सेनिक मिला है। बहुत सम्भव है कि इनमें जो आर्सेनिक उपस्थित है वह ताम्र-अयस्कों में अशुद्धि के रूप में रहा हो। लेकिन जहाँ भी 1% से अधिक मात्रा पाई जाती है वहाँ इसकी सम्भावना अधिक है कि संकरों में आसेनिक की मात्रा बढ़ाने के लिये जानबूझकर ऐसा किया गया। अधिकांश आर्सेनिक धातुसंकरों में आर्सेनिक की मात्रा 1-8% के बीच पायी गई जिससे पता चलता है कि प्राचीन काल में संघटन को वांछित स्तर पर बनाये रह पाना कठिन था।

V. हड़प्पा के तथा ताम्र आसंचय आर्सेनिकीय संकरों के मध्य सम्बन्ध

लेखक ने इसके पूर्व भी इंगित किया है कि संकरण के भिन्न पैटर्नों के कारण हड़प्पा तथा ताम्र आसंचयों की प्रौद्योगिकी में कोई समानता नहीं थी। हड़प्पा तथा आसंचय वस्तुओं में समान रूप से आर्सेनिक संकरण होने पर भी ताम्र आसंचयों में कोई वंग कांस्य नहीं लक्षित होता (सारणी II)। तो भी दोनों में आर्सेनिक की उपस्थिति उनके कच्चे पदार्थ के समान स्रोत एवं प्रौद्योगिकी को संकेतित करती है लेकिन इन दोनों के धातुकर्म स्वतन्त्र रूप से विकसित हुये होंगे[8]।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 3, July 1980, Pages, 235-247

EARLY INDIAN ARSENICAL COPPER

By

H. C. Bhardwaj

Department of A. I. H. C. and Archaeology
Banaras Hindu University, Varanasi

Abstract

In the present communication it is intended to discuss the following.

(*a*) Probable raw materials and the production of arsenic-copper alloys.

(*b*) Advantages of alloying arsenic with copper.

(*c*) Comparison of mechanical properties of arsenic-copper alloys and tin bronzes.

(*d*) Control of the composition of alloys and

(*e*) Relationship between Harappan and Copper Hoard arsenical alloys.

Man's earliest use of metal (native copper) comes from Tepe Ali Kosh, a site near Deh-Luran in Southern Zagros (South-West Iran) and is datable to C. 6500 B. C. Around 4000 B. C. copper smelting is reported from Tal-i-Iblis in Kirman range. During 4th millennium B. C. various categories of copper base meterial were smelted in Iran and Mesopotamia. During this period arsenical alloying and tin alloying were also practised. Arsenical alloying is reported from Tepe Yahya in 4th millennium B. C. and discovery of tin alloying was made by pre-Sumerian people while in their original home in Iran. Use of arsenical copper is also attested from central Europe and Agean early bronze age[1]. In Egypt too, upto 5·6% arsenic has been reported from some early coppers [2]. Many ancient coppers from Caucasus region of remote antiquity have regular copper-arsenic alloying in which the percentage of arsenic goes upto 10%[3]. At Tepe Yahya in Iran only copper-arsenic alloying was in need.

It is not clear whether copper metallurgy developed in India independently or it diffused from west. Further, metallurgy in India does not have a uniform pattern. Both technologically and typologically the copper base material from Early copper-bronze cultures*: Harappan, Chalcolithic and Copper Hoards show incongruent picture. This points towards independent growth or different sources of inspiration. In 1965, the author pointed out that in Harappan copper, arsenic was alloyed deliberately[4] and it was not a case of accidental inclusion as supposed by Ray[5]. Recently, Agrawal has reported the presence of arsenic in copper specimens from Copper Hoards [6]. Therefore, it can be concluded that arsenical alloying of copper was a global phenomenon, having certain advantages and would have been practised deliberately.

In the present communication it is intended to discuss the following—

I. Probable raw materials and the production of arsenic-copper alloys,

II. Advantages of alloying arsenic with copper,

III. Comparison of mechanical properties of arsenic-copper alloys and the bronzes,

IV. Control of the composition of the alloys, and

V. Relation between Harappan and Copper Hoard arsenical alloys.

I. Probable raw materials and the production of arsenic-copper alloys

Sources of arsenic:—Arsenic occurs both in native and combined forms.

(*a*) Native arsenic: At present native arsenic is of rare occurrence but no wonder it occurred in sizeable amounts in antiquity and was consumed by early smelters. In native form it occurs in assoctiation with antimony, lead, silver, nickel, cobalt and copper. Its occurrence as Cu_5As (Algodonite) and Cu_3As (Domeykite) has been reported from Tulamessi mines in Iran and may be of special interest for early arsenical coppers.

(*b*) Oxide: Arsenolite, white arsenic, As_2O_3

(*c*) Sulphides: Orpiment, As_2S_3

Realgar, As_2S_2

(*d*) Sulpharsenides: Mispickel, arsenopyrite, FeAsS.

*These cultures are datable between third and second millennium B. C.

(*e*) Arsenides: Chloanthite, $NiAs_2$
Lollingite, $FeAs_2$

(*f*) Arsenates: Olivenite, $Cu_3As_2O_8Cu(OH)_2$

(*g*) Sulpharsenates: Enargite, Cu_3AsS_4

(*h*) Sulpharsenite: Tennantite, $(Cu, Fe)_{12}As_4S_{13}$

Extraction of arsenic and preparation of arsenical copper

Though copper was extracted at an early date (4000 B. C.), the isolation of arsenic as a metal was not possible that early, since ancients did not have the apparatus, technical skill and chemical knowledge required to produce this very volatile and toxic metal.

There are three possibilities regarding the extraction of arsenic and production of arsenic-copper alloys :—

(i) Though rare arsenic is found in native condition. This is also attested from the finding of two small objects-a ring and a needle of pure arsenic from Kumbulte [7]. It is quite possible that native arsenic was added to molten copper to prepare arsenical alloy.

(ii) Further, minerals like algodonite and domeykite having been reported from Tulamessi, it is not improbable that these minerals might have been used for the production of early arsenical coppers in Iran and adjoining areas.

(iii) It is also possible that the arsenic for arsenical coppers was obtained by smelting of combined minerals of copper and arsenic e.g. enargite or tennantite or by adding orpiment or realgar to copper minerals. Though this would produce copper-arsenic alloy yet it would be very difficult to maintain the percentage of arsenic to a desired schedule. The reason being that arsenic has a boiling temperature of 616°C while the melting point of copper is 1083°C. So when copper and arsenic are smelted together the resulting melt would have a high vapour pressure over arsenic solution in copper and hence much of the arsenic would be lost in the process.

Source of Early Indian arsenical copper

It is very difficult to trace the source of Early Indian arsenical copper. The sulphide ores of arsenic like realgar (As_2S_2) and orpiment (As_2S_3) occur in Chitral, now in Pakistan. The occurrence of arsenical pyrites is reported from Sampthar hill in Kalimpong subdivision, Darjeeling district, West Bengal and that of iron arsenides i.e. lollingite and leucopyrite in mica bearing pegmatites of Hazaribagh disrict of Bihar which at present are not of much economic importance.

The presence of arsenic was at first in all probability merely the result of accidental smelting of certain copper ores in which arsenic was present as a natural impurity. This is attested from the analysis of copper ore found at Mohenjodaro (Table 1).

Table 1
सारणी 1
Analysis of Copper-ore from Mohenjodaro*
मोहनजोदडो से प्राप्त ताम्र अयस्क का विश्लेषण

Copper % ताम्र %	Sulphur % गंधक %	Arsenic % आर्सेनिक %	Nickel % निकेल %	Lead % सीसा %	Insoluble matter % अविलेय पदार्थ %
76.15	1.12	0.37	0.23	tr	4.8

*based on Mackey, E., *Further Excavations at Mohenjodaro*, 1938, p, 480.

But once the beneficial effects of the presence of arsenic in copper alloys was realized by the ancients, arsenical copper was produced deliberately. It is very likely that either the combined copper-arsenic minerals like enargite and tennantite were smelted or noncupriferous arsenic ores like lollingite, orpiment or realgar were added to the smelting mixture and the ores must have been handpicked. The difference in colour, lustre and feel etc. must have been helpful in this direction as the ores enargite and tennantite are blackish-grey with metallic lustre and orpiment and realgar are strongly coloured. In this context it is pertinent to mention that lollingite ($FeAs_2$) has been reported from the excavations at Mohenjodaro and could have not been the source of arsenic. As tennantite and enargite have not been reported from anywhere in India, it is difficult to hazard a guess regarding their having been used.

It is also probable that native arsenic was conspicuous being silvery white in colour and was picked up and added deliberately to the molten copper to produce copper-arsenic alloys but uneven percentage of arsenic found in these alloys restricts this possibility. No wondet there was trade in native arsenic or arsenical ore in antiquity between ancient cultures.

II. Advantages of arsenical alloying

Important mechanical properties of metals are their strength, malleability, hardness and brittleness. Copper melted and poured from a crucible is soft and in this condition it would be useful for making vessels etc. but would be of little use for cutting tools. The fact that copper could be hardened to a great extent by

hammering (work-hardening) must have been realized by early craftsmen who observed this effect and its cause time and again. But pure copper soon becomes brittle on moderate workhardening. Further, early melted copper had considerable amount of oxygen dissolved in copper and this oxygen was not released on solidification but separated out as Cu_2O, forming eutectic with copper on grain boundaries and this grain boundary eutectic reduced the ductility of copper and thus seriously handicapped the cold workability.

The loss in ductility was soon overcome by the ingenuity of early smelters who discovered the use of arsenical alloying. Addition of arsenic upto 7% gives copper remarkable ductility and increasing hardness. The alloys thus obtained could be worked hot and cold without cracking. Secondly, arsenic is also a deoxidizing agent and its addition or natural presence in early copper which always contained appreciable quantities of dissolved oxygen was helpful in the removal of this oxygen. Arsenic reacts with oxygen forming arsenious oxide which is insoluble in copper and separates from the liquid metal as sublimate. Even if any copper oxide is formed during solidification of copper, the arsenic present reduces the injurious copper oxide to copper.

Since arsenic-copper alloys could be workhardened to a greater extent, it would have been very much useful for forging the cutting tools. It may be mentioned that pure cast copper has a hardness of 35-40 Brinell and even low arsenical cast copper has a hardness of 79 Brinell whereas arsenical-copper when workhardened has a hardness of 132 Brinell. Progressive increase in arsenic upto 7% coupled with work-hardening raises the hardness to 200 Brinell and above.

III. Comparison of Mechanical properties of arsenical copper and tin bronzes

Though both arsenic-copper and tin bronzes were made in 4th millennium B. C. yet tin bronzes became more popular. Was it on account of certain inherent superiorities of tin bronzes or there were other reasons? Maximum solid solubility of arsenic in copper is 8% and this does not change with temperature. In case of tin bronzes solubility of tin in copper falls with temperature from 15% to a low figure at room temperature. In both the cases α-phase (malleable) can be workhardened and hardness increases with alloying content. However, in case of tin bronzes repeated hot working and cooling in the range of 600°C-200°C (depending upon the tin content) brittle δ or ϵ phases separate out.† This seriously handicaps its workability,

†However, when cast tin bronze with α-phase only, is rapidly cooled from high temperature in a mould, it does not normally separate δ and ϵ phases but α-solid solution is retained in a metastable condition at room temperature. Since α-phase has appreciable ductility it can be cold worked. Bronze with 5% tin and work-hardened can achieve a hardness of 176-186 Brinell and that with a 10% tin can be hardened to 228 Brinell.

so it is only the α-phase tin bronze which can be workhardened. In contrast arsenical alloy is more useful because of of the stability of its α-phase. Thus forged article of arsenical copper can be workhardened without much risk of their becoming brittle. Arsenical bronzes are thus better than tin bronzes in mechanical properties.

Tin and Arsenic as deoxidizing agents

When tin is present in molten copper (containing soluble copper oxide) it reacts with copper oxide and tin oxide is formed, the latter being insoluble remains suspended in the melt. Hence, such bronzes are mechanically weak and porous and in this respect arsenic alloys are superior.

There may not be any technical superiority of tin bronzes over arsenical alloys. But the main reasons for the popularity of tin bronzes were easy smelting, slightly lower melting points aud easy castability. It is also easy to maintain regular compositions of tin bronzes. In case of arsenic bronzes it is difficult to stick to the desired composition on account of the difficulties associated with high volatility of arsenic. Further, extreme toxicity of arsenic must have discouraged the perpetuation of arsenical bronzes.

IV. Control of the composition of alloys

Thousands of copper objects have been analysed and good majority of them contain less than 1% arsenic. It is quite likely that in these cases the arsenic was present in the copper-ores as an impurity. But whenever the percentage of arsenic rises above 1% or so it is most likely that deliberate efforts were made to increase the arsenic content of the alloy. In most of the arsenic alloys the percentage of arsenic is found varying between 1 to 8 showing the inability of the ancients to stick to the desired composition on account of the reasons mentioned earlier.

V. Relation between Harappan and Copper Hoard arsenical alloys

The author had even earlier pointed out that there was no resemblence in the technology of Harappan. and Copper Hoards because of their different patterns of alloying. Despite the fact that both Harappan and Copper Hoard objects show arsenic alloying, the Copper Hoards do not show any tin bronzes (cf. Table II). However, the presence of arsenic in both does point out some common source of raw materials as well as technological knowledge of arsenic alloying but both the metallurgies look to have developed independently as shown by different tool types, casting techniques and alloying patterns [8].

Table II

सारणी 2

Percentage composition of some early Indian Arsenical bronzes††

कतिपय प्रारंभिक भारतीय आर्सेनिकीय कांस्यों का प्रतिशत संघटन

Sl. No. क्रमांक	Provanance and Description of sample प्राप्ति स्थान तथा नमूने का विवरण	Cu	Sn	As	Pb	Ni	Fe	Sb	S
1.	Harappan celt हड़प्पा से प्राप्त कुल्हाड़ी	98.37	—	1.40	0.11	0.10	0.02	—	
2.	Harappan needle हड़प्पा से प्राप्त सुई	92 55	0.29	2.96	3.72	0.21	0.20	—	
3.	Mohenjodaro chisel मोहनजोदड़ो से प्राप्त रुखानी	92.41	—	3.42	3.28	0.15	0.59	0.10	0.05
4.	Mohenjodaro celt मोहनजोदड़ो से प्राप्त कुल्हाड़ी	94.76	0.09	4.42	0.26	0.14	0.15	—	
5.	Harappn daggaer हड़प्पा से प्राप्त कृपाण	90.05	—	6.58	2.80	0.18	0.39	—	
6.	Copper Hoard Bithur celt	*	—	1.58	0.43	0.013	0.37	—	
7.	Copper Hoard Shahbad sword	*	-	2.46	2.43	0.05	0.96	—	
8.	Copper Hoard Nasirpur celt	*	—	3.31	0.67	0.05	0.01	—	
9.	Copper Hoard Dhanbad axe	*	—	4.62	—	—	0.13	—	
10.	Hami celt	*	—	7.84	1.78	0.13	0.07	—	

*The balance in the analysis r epresents copper (विश्लेषण का शेष भाग ताम्र को सूचित करता है)

††based on

1–5, Vats, M. S., *Exccavations at Harappa*, p. 378 and Marshall, J., *Mohenjodaro and Indus Valley Civilization*, p. 484.

6–10, Agrawal, D, P., et. al., New Data on Copper Hoards and the Diamabad Bronzes, *Man and Environment*, 1978, pp. 41-46.

निर्देश

1. A. Lucas, *Ancient Egyptian Materials and Industries, London* 424-425, 1948.

2. J. A., Charles, Early Arsenical Bronzes-a metallurgical view, *American Journal of Archaeology*, **71**, (1) No. 1, 21-26, 1967.

3. R. J. Forbes, *Studies in Ancient Technology*, Leiden, IX, 168-169, 1964.

4. H. C. Bhardwaj, Some Technical Aspects of Indus Valley Copper, *Bharti*, **9**, 70-71, 1965.

5. P. Ray, *History of Chemistry in Ancient and Medieval India*, Calcutta, p. 24, 1957,

6. D. P. Agrawal, et. al., New Data on Copper Hoards and the Diamabad Bronzes, *Man and Environment*, Ahmedabad, pp. 41-46, 1978.

7. R. J. Forbes, loc. cit., pp. 168-169, 1964.

8. H. C. Bhardwaj, Problem of Advent of Copper in India, *Indian Journal of History of Science*, **5** (2), 234-235, 1970.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 3, July, 1980, Pages, 249-269

नीलो का प्राविधिक विश्लेषण

जान आर० डेनिस

फॉग आर्ट म्यूजियम, हारवर्ड यूनिवर्सिटी कैम्ब्रिज, मेसाचुसेट्

[प्राप्त—जनवरी 1, 1980]

सारांश

छठी शती के बैजंटाइन रजत आसंचय के नीलो के नमूनों के विश्लेषण से सूचित होता है कि नील-कृष्ण अलंकरण के उत्पादन के लिए कई विधियाँ प्रचलित थीं और उनका बहुविध व्यवहार होता था। कतिपत नमूनों में अप्रत्याशित रूप से ताम्र की उपस्थिति से यह सुझाव मिलता है कि प्राचीन रजतकारों ने धात्विक सल्फाइडों के गलनांक को निम्न करने के लिए अपने सूत्रीकरण में संशोधन किया होगा। एक्स-किरण विवर्तन, स्कैनिंग इलेक्ट्रॉन सूक्ष्मदर्शी, उत्सर्जन स्पेक्टोग्रैफी, न्यूट्रान ऐक्टीवेशन तथा एक्सकिरण ऊर्जा विकीर्णन विश्लेषण से प्राप्त आँकड़े अल्पज्ञात धातुशिल्प प्रौद्योगिकी पर नया प्रकाश डालते हैं।

1. प्रस्तावना

नीलो (Niello) की व्युत्पत्ति लैटिन शब्द नाइगेलम (Niegellum) से हुई है जिसका अर्थ है श्याम (कृष्ण)। नीलो एक कान्तिमान, नील कृष्ण पदार्थ है जो एक या अधिक धातु-सल्फाइडों से युक्त होता है और गालक (flux) के साथ संगलित रहता है अथवा धातु-आधार पर झलका (burnish) दिया जाता है। इसका प्रयोग तृतीय सहस्राब्दि ई० पू० से रजत, स्वर्ण तथा कांस्य की वस्तुओं पर उत्कीर्णनों एवं नक्काशी किये आभूषणों को सुन्दर बनाने के लिए किया जाता रहा है। नीलो वास्तविक जड़ाई (inlay) से इस बात में भिन्न है कि नीलो को गरम करके उसके स्थान पर स्थिर किया जाता है. हथौड़े से जड़ा नहीं जाता।

1953 में ब्रिटिश म्यूजियम के मास[1] महोदय ने एक्स-किरण विवर्तन विधि का सम्प्रयोग करते हुये नीलो के अनेक नमूनों का विश्लेषण किया। उन्होंने बताया कि सभी नमूने जिन पर 1000 ई० से पहले की तिथि पड़ी थी वे रजत के प्राथमिक सल्फाइड, एकैन्थाइट (Ag_2S) से बने थे। श्वाइजर

इत्यादि[2] ने अधिक उन्नत प्रविधियों का प्रयोग करते हुये स्विस संग्रह से प्राप्त कई बैजंटाइन वस्तुओं के नीलो का विश्लेषण करके मास महोदय के निष्कर्षों की पुष्टि की है।

1978 में नीलो के एक नमूने का विश्लेषण न्यूट्रॉन ऐक्टीवेशन विधि[3] से किया गया जिससे यह ज्ञात हुआ कि इसके बनाने में ताम्र की काफी मात्रा प्रयुक्त हुई थी। यह नमूना डम्बार्टन ओक्स लाइब्रेरी तथा रिसर्च सेंटर, वाशिंगटन के संग्रह में प्राप्य छठी शती के बैजंटाइन रजत आसंचय से लिया गया। इस विश्लेषण से रोचक परिणाम प्राप्त होने के कारण और भी विस्तृत अध्ययन किये गये। इस बार डम्बार्टन ओक्स आसंचय की 12 वस्तुओं में से 14 नमूने लेकर कई वैश्लेषिक विधियों से उनका विश्लेषण किया गया।

2. इतिहास

धातुशिल्प में अलंकरण के लिए नीलो का उपयोग एशिया माइनर में[4] लगभग 2300 ई० पू० से होता रहा है। वहाँ से इसका उपयोग धीरे-धीरे पूर्व की ओर भूमध्य सागर क्षेत्र तक होने लगा। इस क्षेत्र का प्राचीनतम उदाहरण एक कांस्य खंजर है जिस पर नीलो है, इस पर 1800 ई० पू० की तिथि है और यह सीरिया के बिब्लास में पाया गया[5]। खंजर को अलंकृत करने के लिए दो धातुशिल्प प्रविधियाँ प्रयुक्त हुईं। इसके फल (पत्ती) में स्वर्ण अन्तःस्थापित था। हत्थे पर सोने का पत्तर चढ़ा था जिस पर नीलो किया गया एक प्रतीक था। यह वस्तु क्रीट में बनाई गई होगी जिसका व्यापारिक सम्पर्क इस काल में बिब्लास से था[6]।

परवर्ती कांस्य युग के नीलो शिल्प का सबसे ज्वलन्त नमूना ग्रीस के मुख्य स्थलीय भाग के माइसेनी वासियों ने तैयार किया। 1876 में श्लीमान ने माइसेनी की खुदाई से अनेक नीलोयुक्त वस्तुयें प्राप्त कीं जिनमें से शाही खंजरें अद्वितीय हैं[7]। ये वस्तुयें लगभग 1550-1500 ई० पू० की हैं जिन्हें **मेटलमालेराइ** या धातु पर चित्रांकन प्रविधि के द्वारा तैयार किया गया[8]। इसमें स्वर्णकार पहले कांस्य की पत्ती के दोनों सिरों पर एक छिछली पेंदी बना कर उसमें कांस्य की श्यामल पट्टी या कभी-कभी रजत पट्टी भर देता था। फिर धातु आधार के भीतर कई रंगीन धातुओं (स्वर्ण, रजत, ताम्र, कांस्य, इलेक्ट्रम) से शीतल-पिटे कटआउट (cutout) स्थापित कर दिये जाते। फिर हथौड़े की चोटों को छिपाने के लिये सतहें पालिश कर दी जाती थीं, फल (पत्ती) को आक्सीकृत किया जाता था जिससे रजत वाले भाग काले पड़ जायँ और तब प्रतीक बना कर विभिन्न प्रकार के कटआउटों में नक्काशी कर ली जाती थी। फिर इन खराँचों को नीलो से भर दिया जाता और समस्त रंजित सतह को पालिश करके धातु पर अनेक चमक वाला प्रभाव उत्पन्न किया जाता।

माइसेनियम सभ्यता के चरम विकास (1550-1300 ई० पू०) काल में भूमध्यसागरीय क्षेत्र में ग्रीक प्रभाव-क्षेत्र के बाहर बहुत ही कम नीलो लगी वस्तुयें मिलती हैं। ऐसा प्रतीत होता है कि क्रीट के मिनोअन लोग इस कला से परिचित थे लेकिन अब कोई मिनोअनी नीलो बचा नहीं रह पाया[9]। इस काल में ग्रीस से बाहर जो वस्तुयें मिली हैं उन पर गहरा माइसेनियन प्रभाव है। साइप्रस में एनकोमी स्थान से प्राप्त एक रजत प्याला जो लगभग 1400 ई० पू० का है सोने की पत्ती तथा नीलो से अलंकृत

किया हुआ है जिसका आकार तो साइप्रस परम्परा के अनुरूप है किन्तु उस पर जो कारीगरी की गई है वह निश्चित रूप से माइसेनियन है[10]। सम्भवतः यह ग्रीस में साइप्रस के बाजारों के लिये तैयार किया गया था। इस वस्तु में नीलो का उपयोग सोने की पत्ती को चिपकाने के लिये 'आसंजक' के रूप में हुआ प्रतीत होता है।

केवल कुछ अपवादों को छोड़कर, जिनमें 'इजिप्शियन नीलो' एक है, 1859 ई० में खुदाई में प्राप्त सभी नीलो केवल एक ही अठारहवें वंश की कब्र से, जो महारानी आहोटेप (1587-1562 या 1557) की है, प्राप्त हुए[11]। स्वर्ण का स्पैरो-हाक हेड लटकन वक्षस्थल के आभूषणों के पीछे पहना जाता था। इसका नीलो सुदृढ़ है और पच्चीकारी किये आधार पर जटित है। महारानी आहोटेप व राजकोष से प्राप्त कांस्य की बर्छी में रानी के पुत्र अमोसिस प्रथम की तीतर छाप है जो नीलो के भीतर स्वर्ण को अन्तः-स्थापित करके तैयार की गई है। मिस्र के अन्य नीलो भी इसी काल के हैं किन्तु माइसेनियन नीलो से भिन्न प्रकार से व्यवहृत हैं। सम्भव है कि मिस्र तथा माइसेनिया वासी लोगों ने यह प्रविधि मिनोआनों से सीखी हो।

माइसेनियन सभ्यता के साथ ही 1100 ई० पू०, **मेटलमलेराई** प्रविधि का भी अन्त हो गया। ग्रीस में 'अन्धकार युग' के अन्तर्गत (1000-700 ई० पू०) कोई नीलो तैयार नहीं हुआ। यद्यपि नीलो का ज्ञान था किन्तु श्रेण्य ग्रीसवासियों ने विरले ही इसका उपयोग रजत प्लेटों को अलंकृत करने के लिये किया[12]। पाइक्सिस आफ वेसन' लगभग 200 ई० पू० में नीलो का उपयोग दुरंगे प्रसंग में—रजत पर कृष्ण रंग में हुआ है[13]।

इसके विपरीत रोम के रजतकारों ने इस विधि का काफी प्रयोग किया। रोम की नीलो कला के सबसे पुराने उदाहरणों में प्रथम शती के हिल्डेशीम राजकोष से प्राप्त वर्तनों में देखा जा सकता है।[14] रोमन युग की सम्पूर्ण अवधि में नीलो पाया जाता है किन्तु इसका उपयोग दुरंगे, तिरंगों रूपों में हुआ जो हेलिनिस्टिक परम्परा के अनुकरण पर है।

स्कैनिंग इलेक्ट्रान माइक्रास्कोपी : 4 नमूनों के पालिश किये हुये काटों को परीक्षा फील्ड एमिशन स्कैनिंग इलेक्ट्रान माइक्रोस्कोप (चित्र 1 तथा 2) द्वारा की गई। इस यूनिट में एक केवेक्स-रे सबसिस्टम 5000 A एक्सरे ऊर्जा डिस्पर्सिव एनालाइजर रहता है जो प्रेक्षित क्षेत्रफल के संघटन के विषय में अर्ध-मात्रात्मक सूचना देने में समर्थ है (देखें सारणी IV से VIII तक)[21]।

न्यूट्रान ऐक्टीवेशन विश्लेषण : नीलो के एक नमूने का विश्लेषण इस विधि से ब्रुकहेवेन नेशनल लैबोरेटरी में डा० पीटर्स मायर्स द्वारा किया गया। इससे तत्वों की सही-सही मात्रात्मक सूचना मिल सकी (देखें सारणी 3)[22]।

आप्टिकल मेटालर्जिकल माइक्रास्कोपी : कई नमूनों का प्रेक्षण इस विधि से किया गया।

Table I
सारणी 1

Type of Niello नीलो का प्रकार	% Ag	% Cu	% Pb	% S	भारित अवयवों से परिगणित संघटन Composition Calculated from Weighed Ingredients %Ag_2S	%Cu_2S	%PbS	Begin Melt गलन का प्रारम्भ	End Melt गलन का अन्त	Range परास	
प्लिनी Pliny 23-79 AD	47	36	--	17	53·4	46·6	—	c.700°C	c.700°C	—	
मापा, क्लैविकुला Mappa Clavicula c.900 AD	33	17	—	50	65	35	—		Above 600°C	For Au	पात्र Vessels
	25	25	—	50	47·8	55·2	—		Above 600°C	For Ag	पात्र Vessels
एरैक्लियस 10-12वीं शती ई० Eraclius 10th-12th Century AD	28	28	28	16	32·3	35·2	32·5	c·440°C	c·460°C	20°C	

थियोफिलस, 11-12वीं शती ई० Theophilus 11th-12th Century AD	48	25	12	16	55·7	30·3	14·0	c·430°C	c·560°C	130°C	
सेलिनी, 15वीं शती ई० Cellini 15th Century AD	16	28	40	16	16·2	35·2	48·6	c·440°C	c·640°C	200°C	
जालपेट Jalpaite $Ag_{1·55}Cu_{·45}S$	73·3	12·5	—	14·0	76	24	—		c·680°C		
एकैन्थाइट Acanthite Ag_2S	86	—	—	13	100	—	—		838°C		Decomposes in O_2 O_2 में विघटित हो जाता है।
यूटेक्टिक Eutectic	22	28	34	16	25·3	35·3	39·3	c·440°C	c·440°C		

Table II
सारणी II

1 नमूना Sample	2 XRD	3 Emission SFIC	4 SEM with X-Ray	5 न्यूट्रान ऐक्टीवेशन Neutron Activation	6 वस्तु Object
Do 1	1. Acanthite एकैंथाइट 2. Jalpaite जालपेट	99% Ag 1% Cu 0·6 mg			Suspension Device 63.36.31
Do 2	1. Jalpaite जालपेट 2. Acanthite एकैंथाइट	90% Ag 10% Cu 0·4 mg	1. Major-Ag, s Minor-Cl 2. Major-Ag, S Minor-Cl, Cu		Suspension Device 63.36.3]
Do 3	1. Jalpaite जालपेट	90% Ag 10% Cu 0·8 mg			Rim Fragment from Lamp 65.1.19
Do 4	1. Jalpaite जालपेट 2. Acanthite एकैंथाइट	90% Ag 10% Cu 0·85 mg			Rim Fragment from Lamp 65.1.19
Do 5	1. Acanthite एकैंथाइट	99% Ag tr. Cu 1.0 mg			Vessel 63.36.16
Do 6	1. Silver रजत	99% Ag tr. Cu 0.5 mg			Vessel 63.36.15
Do 7	1. Acanthite एकैंथाइट 2. Jalpaite जालपेट	90-99% Ag 1-10% Cu 2.2 mg	1. Major-Ag, S Minor-Cl 2. Major-Ag, S Minor-Cl, Cu		Vessel 63.36.15

1	2	3	4	5	6
Do 8	1. Acanthite एकैंथाइट 2. Jalpaite जालपेट	90% Ag 10% Cu 0.95 mg	1. MaJor-Ag, S Minor-Cl, Cu 2. Major-Ag, s Minor-Cl, Cu		Polycandelon 63.36.7
Do 9	1. Acanthite एकैंथाइट	99% Ag 1% Cu 1.1 mg			Amphora Fragment 65.1.4
Do 10	1. Silver रजत	99% Ag tr. Cu 0.4 mg			Vessel Fragment 65.1.5
Do 11	1. Silver रजत 2. Acanthite एकैंथाइट	99% Ag 1% Cu 1.05 mg			Openwork Lamp 65.1.6
Do 12	1. Jalpaite जालपेट 2. Acanthite एकैंथाइट	90% Ag 10% Cu —			Openwork Lamp 63.36.25
Do 13	1. Acanthite एकैंथाइट 2. Jalpaise जालपेट	—		86. 4% Ag 13. 4% Cu . 2% Au	Openwork Lamp 63.36.25
Do 14	1. Acanthite एकैंथाइट 2. Jalpaite जालपेट	—	1. Major-Ag, S Minor-Cl, Cu 2. Major-Ag, S Minor-Cl		Openwork Lamp 63.36.25

Table III
सारणी III

Neutron Activation Analysis Dumbarten Oaks 63.36.25
डम्बार्टन ओक्स, न्यूट्रान ऐक्टीवेशन विश्लेषण

नमूना Sample	%Ag	%Cu	%Au
पात्र से रजत Silver from vessel c. 2 mg.	96.7	2.66	0.555
टाँका Solder	91.0	8.41	0.560
नीलो Niello	86.4	13.4	0.228

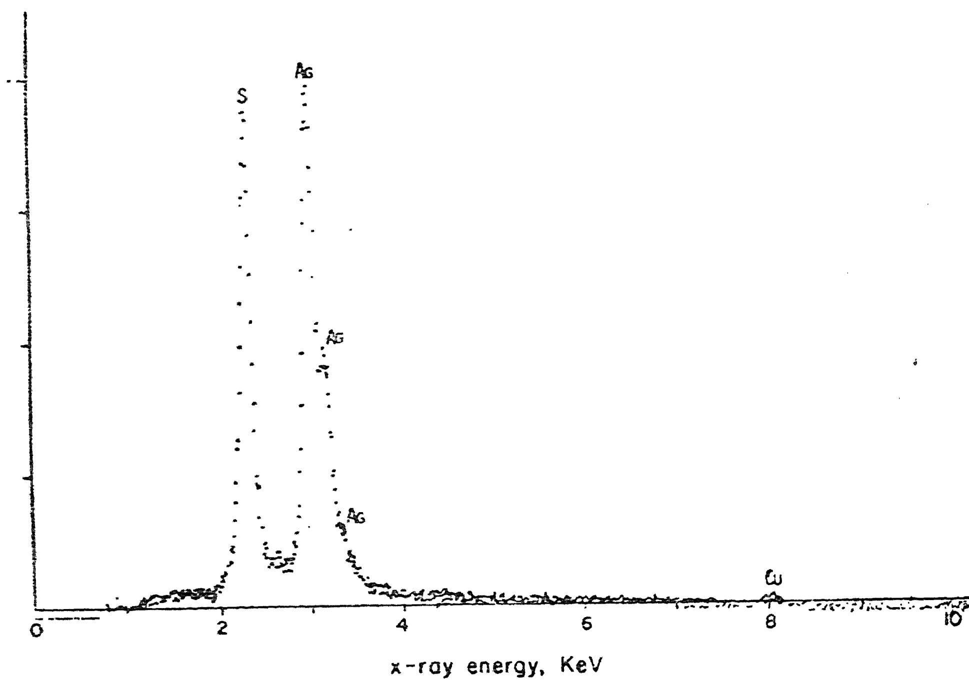
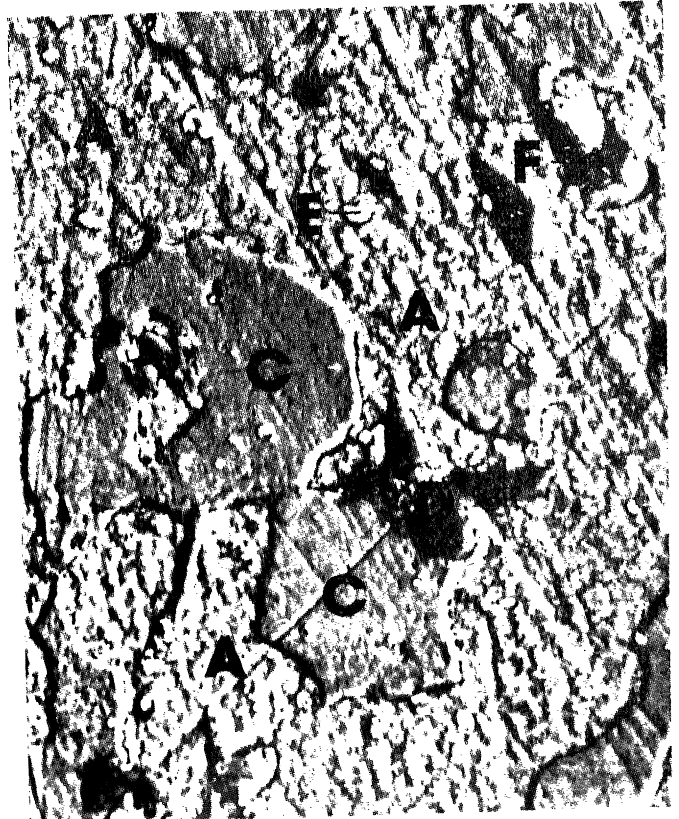


Table IV. Spectra of Acanthite phase (A) in Figure 2
सारणी IV. चित्र 2 में एकैन्थाइट प्रावस्था (A) का स्पेक्ट्रा



चित्र 1 पालिश किये गये काटों का परीक्षण Examination of sections by Field Emmission scanning Electron microscope.



चित्र 2 पालिश किये गये काटों का परीक्षण Examination of section by Field Emission Scanning Electron microscope.

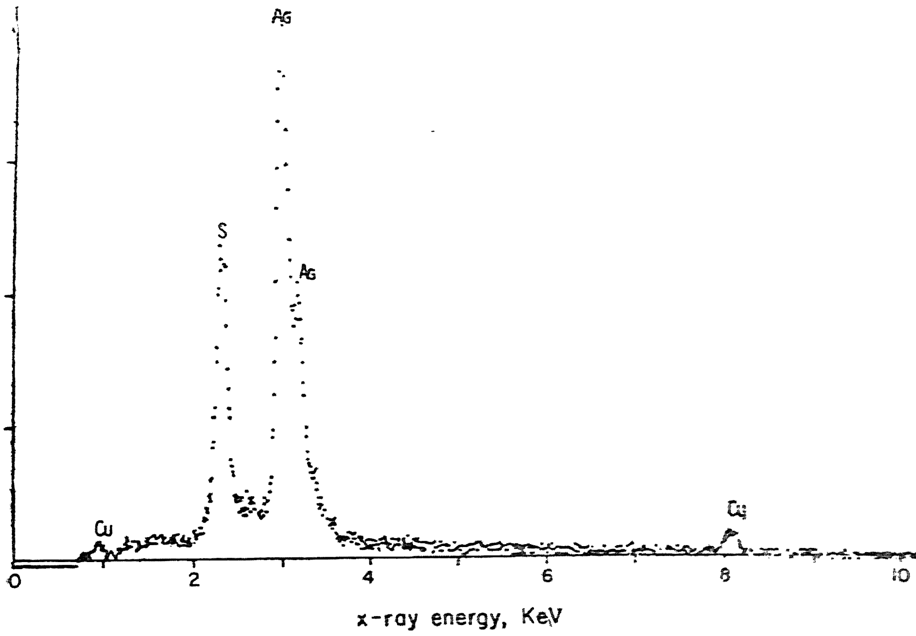


Table V. Spectra af Jalpaite phase (C) in Figure 2
सारणी V. जालपेट प्रावस्था (C) का स्पेक्ट्रा चित्र 2 में

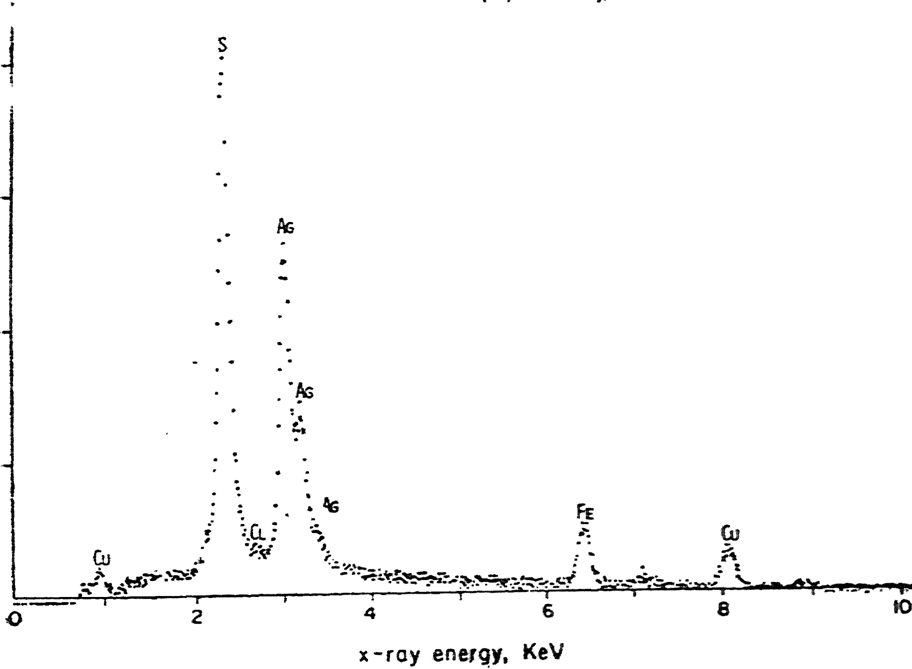


Table VI. Spectra of dark inclusion (D) in Figure 2
सारणी VI. चित्र 2 में श्याम सम्मेल (D) का स्पेक्ट्रा

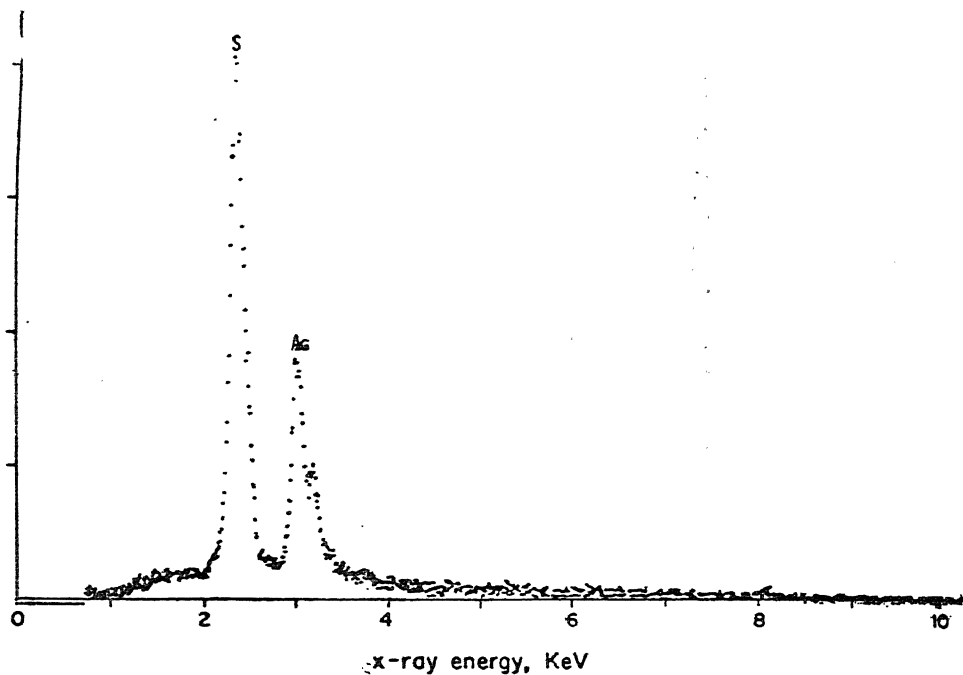


Table VII. Spectra of white metal inclusion (E) in Figure 2

चित्र VII. चित्र 2 में श्वेत धातु सम्मेल (E) का स्पेक्ट्रा

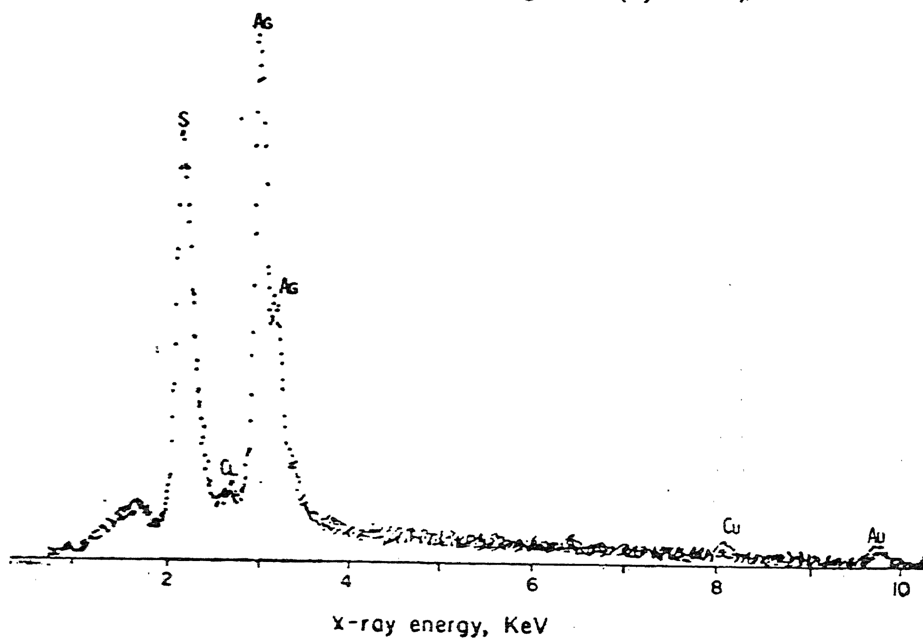


Table VIII. Spectra of inclusion (F) in Figure 2

सारणी VIII. चित्र 2 में सम्मेल (F) का स्पेक्ट्रा

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 2 में बैजंटाइन नीलो के 14 नमूनों के विश्लेषणों का सारांश दिया गया है। इनमें से 9 नमूनों में 1% से अधिक ताम्र तथा छह नमूनों मे 10% या इससे अधिक ताम्र पाया गया। एक्स किरण विवर्तन पैटर्नों से ताम्र धारक प्रावस्था जालपेट ($Ag_{1\cdot55}Cu_{0\cdot45}S$) के रूप में पहचानी गई। एक्स-किरण डिफ्रैक्टोमीटर तथा उत्सर्जन स्पेक्ट्रोग्राफ से प्राप्त आँकड़ें इस मान के साथ सन्निकट सह-सम्बन्ध प्रदर्शित करते हैं।

कई एक नमूनों में दो प्रावस्था प्रणाली में एकैन्थाइट (Ag_2S) के साथ-साथ जालपेट भी प्राप्त हुआ (देखें चित्र 1)। ये दोनों प्रावस्थायें शीतलन के समय बनीं[23]। इन दोनों प्रावस्थाओं का विश्लेषण कई नमूनों को लेकर इनर्जी डिस्पर्सिव एक्स-रे एनालिसिस द्वारा किया गया। इस प्रकार जो संघटन प्राप्त हुये वे मात्रात्मकतः जालपेट तथा एकैन्थाइट के संगत थे (देखें सारणी IV तथा VI)। न्यूट्रान ऐक्टीवेशन विश्लेषण से ताम्र की सार्थक मात्रा पहचानी गई (देखें सारणी III)। इस विश्लेषण में सबसे रोचक खोज थी प्रत्येक नमूने में स्वर्ण की उपस्थिति। पात्र के टाँके तथा धातु में प्रायः समान मात्रा में स्वर्ण पाया गया जबकि नीलो के नमूने में काफी कम। इस अन्तर के कारण तथा प्रत्येक नमूने में ताम्र की मात्रा में अन्तर के कारण यह मान लेना उचित ही होगा कि नीलो के बनाने में प्रयुक्त रजत टाँके तथा पात्र बनाने के लिये प्रयुक्त रजत एक सी नहीं थी।

चित्र 2 से अनेक हल्के तथा गहरे सम्मेल ((inclusions)दिखते हैं। हल्के सम्मेलों का विश्लेषण इनर्जी डिस्पर्सिव एक-रे एनालिसिस विधि से किया गया और यह पाया गया कि ये प्रधानतः रजत के हैं (देखें सारणी VI-VIII)। काले धब्बों में तत्वों का मिश्रण रहता है। रजत, गन्धक तथा ताम्र के अतिरिक्त लोह तथा जिक की भी लेश मात्रायें पाई गईं जो उत्पादन प्रक्रम की अशुद्धियों के कारण हो सकती हैं कई स्पेक्ट्रमों में क्लोरीन पाया गया (देखें सारणी IV, V, VI) जो भूमि में दबे रहने के कारण उत्पन्न संक्षारण उत्पादों के कारण हो सकता है।

अनेक नमूनों में ताम्र की पर्याप्त मात्रा प्राप्त होने के कारण सूचित होता है कि बैजंटाइन रजतकार नीलो के गलन विन्दु को घटाने का प्रयत्न कर रहे थे जिससे आरोपण में सुविधा हो। फाग आर्ट म्यूजियम की प्रयोगशाला में सम्पन्न प्रयोगों से सूचित होता है कि जालपेट में जिस अनुपात में रजत-ताम्र पाये जाते हैं यदि वे उसी अनुपात में नीलो में हों तो यह धातु सबस्ट्रेट के साथ सरलता से संगलित हो जाते हैं। इस प्रकार नीलो को झलकाने की आवश्यकता नहीं रह जाती जिसके कारण तेजी से तथा अधिक सूक्ष्मता से इसे लगाया जा सकता है।

इस अध्ययन से जो सूचना प्राप्त होती है उसके आधार पर 1953 में मास द्वारा दिये गये निष्कर्षों में अवश्य ही संशोधन होना चाहिये[24]। नमूनों के तात्विक विश्लेषण से पता चलता है कि बैजंटाइन रजतकार गलनीय नीलो के प्रयोग की सम्भावनाओं से परिचित था। विभिन्न स्थानों से प्राप्त एवं विभिन्न काल के नीले के अतिरिक्त अध्ययन की आवश्यकता बनी हुई है जिससे इस रोचक धातु कार्य के आरोपण तथा उत्पादन प्रविधियों की तिथियों के संक्रमण का ठीक-ठीक पता चल सके।

ऐंग्लो-सैक्सन लोगों ने रोमवासियों से यह कला ग्रहण की। सुट्टन हूशिप बेरियल में सोने के ऊपर बने नीलो की अनेक वस्तुयें हैं। 1953 में मास ने फुलर तथा स्ट्रिकलैण्ड ब्रूचों का विश्लेषण करके देखा कि ये दोनों एकैन्थाइट थे।[15]

इसी काल में बैजंटाइन साम्राज्य के रजतकार भी नीलो का अत्यधिक प्रयोग विशेषतया धार्मिक रजत वस्तुओं पर अभिलेखन के लिये, कर रहे थे। इसके लिये नीलो को बारीक चूर्ण बनाकर उसमें गालक मिलाया जाता था। फिर एक द्रव मिलाकर फलक (बिल्ले की सतह) पर पोत दिया जाता था। फिर उस वस्तु तो तब तक तपाया जाता था जब तक नीलो रजत सतह के साथ संगलित न हो जाय। यह प्रक्रम इनैमेलीकरण से बहुत कुछ मिलता-जुलता है।[16]

माइसेनियनों ने **मेटलमलेराइ** के उपयोग द्वारा उत्कृष्ट नीलोयुक्त कला के उदाहरण प्रस्तुत किये हैं। ऐसा प्रतीत होता है कि माइसेनियन के पतन के पश्चात् यह प्रविधि लुप्त हो गई और उसके बाद की संस्कृतियों में दुरंगे या तिरंगे कार्यों में ही नीलो का प्रयोग हुआ।

3. गुणधर्म, उत्पादन तथा आरोपण

(क) गुणधर्म : रोजेनबर्ग[17] ने विस्तार से नीलो तथा इनैमेल के अन्तर को स्पष्ट किया है। नीलो एक धात्विक सल्फाइड है जबकि इनैमेल काँच है जो अलंकरण-क्षेत्रफल में संगलित हो जाता है। कमरे के ताप पर अधिकांश नीलो संरचनायें अत्यन्त भंगुर होती हैं किन्तु निम्न ताप पर (100-150° से०) वे इतनी आघातवर्ध्य हो जाती हैं कि धातु सबस्ट्रेट में झलकाई जा सकती हैं। सारणी 1 में विभिन्न नीलो वस्तुओं के गलनांक पृथक-पृथक हैं। केवल रजत तथा गन्धक से तैयार नीलो 838° से० पर गलता है और आक्सीजन की उपस्थिति में इसी ताप पर विघटित भी होता है।[18] अत: ऐकैन्थाइट से युक्त नीलो को कम आँच पर बारम्बार तप्त करके एवं सल्फाइड को यथास्थान रख कर आरोपित करना चाहिये। यदि इस पदार्थ में ताम्र अथवा / तथा सीसे की अल्प मात्रा मिला दी जाय तो यह कम ताप पर गल जावेगा।

(ख) उत्पादन : तात्पर्य यह कि केवल रजत को गलाकर या ताम्र तथा / अथवा सीसे की विभिन्न मात्रायें मिलाकर एवं गले पिंड को गंधक तत्व के ऊपर डालकर श्याम रंग का धात्विक सल्फाइड यौगिक बनाकर नीलो तैयार किया जा सकता है। ठंडा होने पर यह यौगिक स्थूल चूर्ण के रूप में पीस लिया जाता है जिससे उत्कीर्णित या नक्काशीकृत धातु सबस्ट्रेट में लगाने में सुविधा हो।[19]

(ग) आरोपण : नीलो आरोपण की दो विधियाँ हैं। (1) संघटन एवं सल्फाइड के गलनांक के अनुसार नीलो चूर्ण को उत्कीर्णित अलंकरण में भरा जा सकता है जब तक कि नीलो बहकर धातु से संगलित नहीं हो जाता। उसकी अधिक मात्रा को काँछ दिया जाता है और तब नीलो को धातु पृष्ठ से पालिश कर दिया जाता है। (2) चूँकि अधिकांश नीलो कम उष्मा पर आघातवर्ध्य हो जाते हैं अत: बारम्बार गरम करके और चूर्णित सल्फाइड को धातु-सबस्ट्रेट में झलका करके आरोपित किया जा सकता है।[20] यह विधि पहली विधि से अधिक समय लेने वाली है।

4. विश्लेषण

इस अध्ययन में प्रयुक्त सभी नमूने डम्बार्टन ओक्स लाइब्रेरी तथा वाशिंगटन के रिसर्च सेन्टर के संग्रह के मध्य छठी शती के बैजंटाइन रजत आसंचय से सूक्ष्म-प्रतिदर्शन प्रविधि द्वारा लिये गये। इस आसंचय के सभी खंड (वस्तुयें) कुस्तुन्तुनिया में 25 वर्ष की अवधि के भीतर तैयार किये गये थे। ग्यारह पात्रों में से 14 नमूने लिये गये जिनमें से सबसे बड़ा नमूना लगभग 5 मिग्रा० का था।

अधिकांश नमूनों का विश्लेषण डायनो XRD 8000 विवर्तन-मापी द्वारा किया गया। प्रत्येक नमूने की 1 मिग्रा० से कम मात्रा को गांडोल्की कैमरा में माउन्ट करके 20 ma, 35KV पर 20 घंटे तक विकिरण से अनुप्रभावित किया गया। नमूनों के खनिजकीय घटकों की पहचान के लिये एक्स-रे चूर्ण फोटोग्राफों का उपयोग किया गया (देखें सारणी II)।

उत्सर्जन स्पेक्ट्रोग्राफी : 13 नमूनों के एक अंश का विश्लेषण उत्सर्जन स्पेक्ट्रोग्राफी विधि द्वारा किया गया। इससे प्रत्येक नमूने तत्वों के संघटन के विषय में अर्धमात्रात्मक सूचना प्राप्त हो सकी। ये विश्लेषण ऐप्लाइड रिसर्च लैब स्पेक्ट्रोग्रैफिक एनालाइजर, माडल संख्या 26000-I द्वारा सम्पन्न हुये। नमूनों का भार 0·4 मिग्रा० से 2·2 मिग्रा० तक था (देखें सारणी II)।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 3, July, 1980, Pages 249-269

NIELLO : A TECHNICAL STUDY

By
John R. Dennis
Fogg Art Museum, Harvard University, Cambridge, Massachusetts

ABSTRACT

Analysis of niello samples taken from a 6th century Byzantine silver hoard indicates that several methods of manufacture and application may have been used by the ancient silver-smith. The unexpected presence of copper in some samples suggest that the silversmith may have modified their formulation to lower the melting point of the black, decorative sulphide. The data from analyses using X-Ray diffraction, scanning electron microscopy, emission spectrography and X-Ray energy dispersive analysis shed new light on a little-understood metalworking technique. Various niello recipes taken from historical treatises are reviewed with this new data as a reference.

1. Introduction

Niello, from the Latin *nigellum*, meaning black, can be described as a lusterous, blue-black substance, composed of one or more metallic sulphides which is either fused with a flux or burnished flush with a metal ground. It has been used since the 3rd millenium B.C. to enrich and heighten engraved and chased ornament and inscriptions on silver, gold, and bronze objects. Niello differs from a true inlay in that niello is fixed in place by heating and not hammered into the field.

In 1953, A. Moss (1) of the British Museum analyzed a number of niello samples using x-ray diffraction. He reported that all samples dated prior to 1000 A.D. were composed of the primary sulphide of silver, acanthite (Ag_2S). Using more sophisticated analytical techniques, Schweizer, et al (2) reconfirmed Moss' conclusions after analyzing niello from several Byzantine objects in Swiss collections.

In 1978, analysis of a sample of niello using neutron activation (3) showed a significant amount of copper had been used in its manufacture. The sample came

from a late 6th century Byzantine silver hoard in the collection of Dumbarten Oaks Library and Research Center, Washington, D.C. Because of the interesting data acquired by this analysis, a more detailed study was indicated. Fourteen samples were taken from 12 Dumbarten Oaks hoard objects and subjected to a number of analytic techniques. Although only a portion of the silver hoard neillo was sampled some interesting observations can be made about the results of the various analyses.

2. History

The initial use of niello as a decorative process on metalwork can be traced back at least to 2300 B.C. in Asia Minor (4). From there the process gradually moved east to the Mediterranean area. The earliest example from the Mediterranean is a nielloed, bronze dagger, dating c. 1800 B.C., found at Byblos, Syria (5). Two metalworking techniques were used to produce the dagger's decoration. The blade was inlaid with gold. The handle was plated with gold, into which a contrasting motif was nielloed. This object may have been made in Crete, which had trade contacts with Byblos during this period (6).

The Mycenaeans, on Mainland Greece, produced the most spectacular examples of Late Bronze Age niello work. Schliemann's excavations of the Shaft Graves at Mycenae in 1876 produced a number of nielloed objects, including ceremonial daggers of unequalled excellence (7). These objects, which date c. 1550-1500 B.C. were produced by a technique known as *Metallmalerai*, or painting in-metal (8). The smith first cut a shallow bed into both sides of the bronze blade, into which was laid a darker sheet of bronze, or sometimes silver. Cold-hammered cut-outs made from various colored metals (gold, silver, copper, bronze, and electrum) were then inlaid into the metal ground. The surfaces were polished to removc hammer marks, the blade was oxidized to darken the silver sections, and details of the motif were engraved and chased into the various cutouts. These incisions were then filled with niello and the entire "painted" surface was polished, thus producing a metallic polychromed effect unequalled since in Western Art.

During the height of the Mycenaean civilization (1550-1300 B.C.) nielloed objects are rare outside the sphere of Greek influence in the Mediterranean area. The Minoans on Crete were most likely familiar with the technique, and may have taught the Mycenaean's *Metallmalerai*, however no Minoan niello has survived (9). Other objects found outside Mainland Greece during this period show strong Mycenaean influence. A silver cup, dating c. 1400 B.C., decorated with gold leaf and niello, found at Enkomi, Cyprus, has a traditional cypriot shape but the workmanship is definitely Mycenaean (10). It was probably made in Greece for the Cypriot market. Niello appears to have been used as an "adhesive" on this object to fix the gold leaf highlights to the nielloed background.

With few exceptions, that which can be described as 'Egyptian niello' comes from one 18th Dynasty grave, that of Qeen Aahotep (1587-1562 or 1557), excavated in 1859 (11). The gold Sparrow-Hawk Head pendant was worn at the back of her breast ornaments. The niello is compact, set into a deeply carved bed, which is not a characteristic of Mycenaen nielli. A bronze dagger found in the Queen Aahotep Treasure carries the cartridge of Amosis I (Queen Aahotep's son) which is inlaid gold against a nie llo center rib on each side of the blade.

Other Egyptian nielli corresponds with the same time period, but is applied differently than Mycenaean niello. Both the Egyptians and Mycenaens may have learned the technique from the Minoans, adapting it to suit their respective aesthetics.

With the end of the Mycenaean civilization, c. 1100 B.C., the *Metallmalerai* techique died out. During the 'Dark Ages' on Greece (1000 B.C. – 700 B.C.) no known Niello was produced. Niello was known, but used sparingly by the Classical Greeks, usually to decorate silver plate (12). The *pyxis of Vaison*, c. 200 B.C., shows us the use of niello in a bi-tonal context, i.e. black on silver (13). There are other objects produced by the Greeks using the technique, but none compare to the imagination the Mycenaens were able to give to their nielloed metalwork.

The Roman silversmiths on the other hand made great use of the technique. One of the earlier examples of Roman niello work is found on vessels from the Hildesheim Treasure, which dates from the 1st century A.D. (14). Niello is found in use throughout the Roman period, however, it is used in a bi-tonal or tri-tonal context, following the Hellanistic tradition.

The anglo-Saxons adopted the practice from the Romans with some spectacular results. The Sutton Hoo Ship Burial contained several beautiful examples of niello work on gold. Both the *Fuller* and *Strickland Brooches* were analyzed by Moss in 1953; the niello from both was found to be acanthite (15).

During this period, the silversmiths of the Byzantine Empire were also using niello extensively, especially in inscriptions on their silver religious objects. A small Byzantine religious plaque shows what may be a rather unique method of applying the niello. The neillo was ground to a fine powder, to which a flux was added. This was mixed with a liquid and brushed on the plaques surface. The object was then heated until the niello fused to the silver surface. This process is very similar to enameling (16).

The Mycenaens, with their use of *Metallmalerai* produced the most spectacular examples of nielloed work. This technique seems to have been lost after the Mycenaen's decline, and cultures since have used niello primarily in a bi-tonal or tri-tonal context.

3. Properties, Manufacture, and Application

A. Properties

Rosenberg (17) goes to great lengths to describe the difference between niello and enamel; niello being a metallic sulphide, whereas enamel is a glass which fuses into the decorative area. At room temperature most compositions of niello are quite brittle, however at low heat (100°-150°C) they will become malleable enough to allow them to be burnished into the metal substrate. The various niello recipes from Table I show a variety of melting points. Niello manufactured with only silver and sulphur (acanthite) melts at 838°C, and will decompose at this temperature in the presence of oxygen (18). Therefore, a niello consisting of acanthite must be applied by repeatedly heating to low heat and burnishing the sulphide into place. The addition of small amounts of copper and/or lead will lower the melting temperature of the material.

B. Manufacture

Briefly, niello can be produced by melting silver alone, or with various proportions of copper and/or lead, and them pouring the molten mass over elemental sulphur, thus forming a black, metallic sulphide compound. Upon cooling, the compound is ground into a coarse powder to facilitate application into the engraved or chased metal substrate (19)

C. Application

There are two primary methods of applying niello. First, depending on the composition and, therefore, the melting point of the sulphide, niello powder may be set into the engraved decoration and heated until the niello flows and fuses to the metal. The excess is scrapped off, and the niello is then polished flush with the metal surface. Secondly, because most compositions of niello will become malleable at low heat, niello can be applied by repeatedly heating and burnishing the powdered sulphide into the metal substrate (20). This process is more time-consuming than the first method.

4. Analysis

A. Samples

All samples for the present study were taken from a mid-6th century Byzantine silver hoard in the collection of Dumbarten Oaks Library and Research Center in Washington, D.C. using micro-sampling techniques. All pieces in the hoard are reputed to have been manufactured within a twenty-five year period in Constantinople. Fourteen samples were taken from eleven vessels; the largest sample being approximately 5.0 mg.

B. X-Ray Diffraction

Most samples were analyzed using a DIANO XRD 8000 diffractometer. Considerably less than 1.0 mg of each sample was mounted in a Gondolfi camera in the Debye-Scherrer mode and irradiated for 20 hours at 20 ma, 35 kV. The x-ray powder photographs were used to qualitatively identify the mineralogical constituents of the samples (see Table II).

C. Emission Spectrography

A portion of thirteen samples were analyzed using emission spectrography which provided semi-quantitative information about the elemental composition of each sample. The analyses were done on an Applied Research Lab Spectrographic Analyzer, model number 26000-1. Sample weights varied from 0.4 mg to 2.2 mg (see Table II).

D. Scanning Electron Microscopy with Energy Dispersive X-Ray Analysis Capability

Polished sections of four samples were examined with a Cwikscan 100 Field Emission Scanning Electron Microscope (see Figure 1 and 2). This unit is provided with a Kevex-ray Sub System 5000A X-ray Energy dispersive analyzer which gives rapid semi-quantitative compositional information about areas being viewed with the SEM (see Table IV through VIII) (21).

E. Neutron Activation Analysis

One sample of niello was analyzed using Neutron Activation Analysis by Dr. Pieter Myers at the Brookhaven National Laboratory. This provided accurate quantitative elemental information (see Table III) (22)

F. Optical Metallurgical Microscopy

Several samples were mounted in polyester mounting media, polished, etched and viewed with a polarizing optical reflected-light microscope. These polished sections were also used with the SEM.

5. Discussion and Results

The analyses of the fourteen samples of Byzantine niello are summarized on Table II. Nine of the samples contain more than 1% copper, six of the samples 10% or more copper as determined by visual estimates of emission spectrographic line intensities. X-ray diffraction patterns identified the copper bearing phase as jalpaite ($Ag_{1 \cdot 55}Cu_{\cdot 45}S$). In nature, the mineral jalpaite contains about 12.5% copper. The

data from the x-ray diffractometer and emission spectrograph show a reasonably closs correllation with this value.

Many of the samples contained acanthite (Ag_2S) as well as jalpaite in a two phase system (see Figure 1). These two phases were formed during the cooling period (23). Both phases have been analyzed on several samples with energy dispersive x-ray analysis and their analyzed compositions quantitatively correspond to jalpaite and acanthite (see Tables IV and VI). The Neutron Activation Analysis detected a significant amount of copper (see Table III). One interesting finding of this analysis is the amount of gold in each sample. The solder and metal of the vessel contain nearly the same amount of gold, whereas the niello sample contains significantly less. Because of this difference and the difference in the amount of copper in each sample, it is reasonable to assume that the silver used in making the niello was not the same as the silver used in making the solder and vessel body.

Figure 2 shows several light and dark inclusions. The light inclusions were analyzed using energy dispersive x-ray analysis and found to be mainly silver (see Tables VI-VIII). The dark inclusions contain a mixture of elements. Besides silver, sulphur and copper, minor amounts of iron and zinc were found, probably impurities from the manufacturing process. Chlorine found in several spectra (see Tables IV, V, and VI) may be attributed to corrosion products formed during burial.

Because of the significant amount of copper found in a number of the samples, it would indicate that the Byzantine silversmith was attempting to lower the melting point of his niello to facilitate the application process. Practical experiments carried oul in the Objects Laboratory, Center for Conservation and Technical Studies, Fogg Art Museum, indicated that a niello with a silver-copper ratio similar to that of jalpaite easily fuses to the metal substrate. Thus, the need for repeated burnishing of the niello is eliminated, which will make the application both faster and more precise.

Because of the information obtained through this new study, the conclusions made by Moss in 1953 must now necessarily be amended (24). The elemental composition of the samples indicate the ancient Byzantine silversmith was aware of the possibilities of using a fusible niello, and most likely did utilize both methods of application. Additional study is needed on niello from a variety of areas and time periods to more precisely define the dates of transition in application and manufacturing techniques of this interesting metalworking process.

Acknowledgements

The author wishes to express his gratitude to Ms. Karen Motylewski of the mithsonian Astrophysical Laboratory for her invaluable assistance with the SEM

analyses, and tc Dr. Leon Stuldowski, Mr. Gene Farrell, and Mr, Clifford Craine, all staff members at the Fogg's Center for Conversation and Technical Studies.

NOTES AND REFERENCES

1. Moss, A., 'Niello', *Studies in Conservation*, 2, 1953, pp. 49-61.
2. Lazoic, M., Durr, N., Durand, H., Houiet, C., and Schweizer, F., 'Objects byzantins de la collection du Musee d'art et d'histoire', *Genava*, XXV, 1977, pp. 51-62.
3. This analysis was performed by Dr. Pieter Myers at the Brookhaven National Laboratory in 1978.
4. Higgins, K., *Minoan and Mycenaen Art*, Oxford University Press, 1967, pp. 140.
5. *Ibid* pp. 140-141.
6. *Ibid* p. 141.
7. *Ibid* pp. 138-140, 150-152.
8. see Vermuele, E., *Greece in the Bronze Age*, University of Chicago Press, 1972, pp. 98-99, plates XII-XIII.
9. Higgins, R., 1967, p. 141.
10. *Ibid* pp. 150-151, figure 188.
11. Rosenberg, M., *Niello-Bis zum Jahre* 1000 *Nach Chr*, Frankfurt am Main, 1924, p. 24.
12. Higgins, R., *Greek and Roman Jewelery* Methuen, 1961, p. 28.
13. Rosenberg, M., 1924, p. 36.
14. Strong, D., *Greek and Roman Silver Plate*, 1966, p. 13.
15. Moss, A., 1953, p. 61.
16. Rosenberg, M., 1924, p. 50.
17. *Ibid* p. 4
18. Skinner, B., 'The System Cu-Ag-S', *Economic Geology*, 81, 1966, 1, pp. 1-26.
19. There are many methods of manufacturing niello, this generalization is given here merely to give the reader an idea of the process. See the following for specific examples;

    Plinius Secundus Cais (Pliny), *Historia Naturalis*, English edition by Rackham, B. and Jones, W., London, 1938.

    Heraclius (Eraclius), *De Artibus Romanorum*. English translation in Marifield, M.P., *Original Treatises on the Art of Painting*, London, 1849, reprinted New York, 1969.

Cellini, B., *Sopra l'oreficeria e la Scultura*, English translation by Ashbee, C. R., London, 1888. Reprinted 1967.

Moss, A., 1953.

20. Moss, A., 1953, pp. 53-55.
21. This instrument is housed at the Smithnonian Astrophysical Laboratory, Cambridge, Mass.
22. It must be noted that this analysis will *not* detect lead.
23. Skinner, B., 1966, pp. 10-15.
24. The x-ray diffraction pattern for the mineral jalpaite was not published until 1957. See Skinner, B., 1966, pp. 1-3.
25. Adapted from Moss, A. 1253, p. 61.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 3, July 1980, Pages, 271-283

टैबो मठ के भित्तिचित्र : उनके संरक्षण की समस्या

बी० एन० टंडन
भारतीय पुरातात्विक सर्वेक्षण, देहरादून

[प्राप्त—जनवरी 5, 1980]

सारांश

प्रस्तुत निबन्ध में जिला लाहौल तथा स्पिती स्थित टैबो मठ के भित्ति-चित्रों की समस्याओं एवं उनके संरक्षण के सम्बन्ध में विस्तार से विवेचना की गई है।

1. प्रस्तावना

लाहौल-स्पिती घाटी भारत-तिब्बती सीमा पर सुदूर स्थित है। लाहौल भारत के उत्तरी पश्चिमी भाग में 13050 फुट की ऊँचाई पर है जबकि स्पिती पूर्व में है। टैबो मठ लाहौल स्पिती जिले की काजा तहसील में स्थित है। यहाँ के बौद्ध मठों को उत्कृष्ट भित्तिचित्रों से सजाया जाता है और इनमें मिट्टी की अनेक मूर्तियाँ रहती हैं जिन्हें ऊपर से विभिन्न रंगों से रंग दिया जाता है। यहाँ पर तिब्बती बौद्धधर्म का पूरा प्रभाव देखने को मिलता है। ये मठ 11वीं से 13वीं शती के मध्य के हैं। इनमें अजन्ता जैसी अनेक गुफायें हैं और कभी-कभी उत्तरी अजन्ता के नाम से पुकारे जाते हैं। इनमें बुद्धपरक अंकन है।

सन् 1972 (14 अगस्त) में इन बौद्ध मठों को (चित्र 1) सुरक्षित घोषित कर दिया गया जिसके शीघ्र ही वाद इनके रासायनिक संरक्षण का कार्य प्रारम्भ हुआ। इन मठों या स्मारकों की संख्या दस है। ये मठ स्पिती घाटी में स्थित हैं और चतुर्दिक से हिमाच्छादित पर्वतों से घिरे हैं फलस्वरूप ताप अत्यन्त निम्न रहता है। ये मठ शताब्दियों तक उपेक्षित रहे आये। इसके अतिरिक्त, यह घाटी भौकम्पिक खंड में आती है जिससे प्रायः भूकम्पन होता रहता है। विगत कई वर्षों से इन भूकम्पों की संख्या बढ़ती रही है जिससे इन मठों का भूभाग तथा पास की बस्तियाँ विनष्ट होती रही हैं। सन् 1975-1976 के कुछ भूकम्प अत्यधिक तीव्र थे जिससे गुफाओं, दीवालों, फर्शों, छतों, भित्तिचित्रों तथा पलस्तर की प्रचुर क्षति हुई है (चित्र 2 जो 8-9 सितम्बर 1976 को लिया गया)। विशेष परिस्थितियों के उत्पन्न हो जाने से डुवांग गुफा की 1972-73 में विशेष मरम्मत करानी पड़ी।

2. टैबो भित्तिचित्रों का स्तरीकरण

प्रथावश ये मठ कच्ची ईंटों से बने हैं और मिट्टी (कीचड़) से ही पलस्तर किये गये हैं। इस पलस्तर के ऊपर चूने की पतली परत के ऊपर भित्तिचित्र बनाये गये हैं। कुछ मठों की छतें चित्रित काष्ठ के पल्लों और शहतीरों से बनी हैं (चित्र 3) और कुछ में सादी लकड़ी की टहनियों से बनी छतें हैं जो शायद बाद में की गई मरम्मत के कारण हो सकती हैं।

3. भित्तिचित्रों का विनष्टीकरण एवं उनकी दशा

चूँकि दीवाल तथा पलस्तर दोनों ही कीचड़ के हैं अतः उनके मध्य अधिक बंधन-शक्ति की आशा नहीं की जा सकती। निस्सन्देह जलवायु की परिस्थितियाँ अधिक रासायनिक क्रियाशीलता नहीं आने देतीं फलतः केवल भौतिक तथा यान्त्रिक क्षतियाँ ही हो पाती हैं जिनके मूल में भूकम्पन, भित्तिचित्रण के समय प्रयुक्त पदार्थों की निर्बलता, मानवीय सनक के साथ कालक्रम में कलाकृतियों का विनाश सम्मिलित हैं। अनुपयुक्त वातावरण यथा कुहरा, जल की रिसन आदि भी विनष्टीकरण के लिये उत्तरदायी हैं। इन समस्त मठों में तेल के दीपकों के जलने या सुगन्धित बत्तियाँ जलाने से कालिख उत्पन्न होती है। फिर तो त्रुटिपूर्ण सामग्री के प्रयोग तथा दोषपूर्ण संरचना के कारण समस्या गम्भीर हो उठती है। हमने नौ गुफाओं की दशा का अध्ययन किया है जिससे उनके उचित रखरखाव, सफाई, सुदृढ़ीकरण तथा संरक्षण के लिये सुनियोजित वैज्ञानिक योजना बनाई जा सके। इन गुफाओं का आर्द्रता, केशिका क्रिया अथवा संघनन के प्रति उनकी भित्तियों की स्थिति का निरीक्षण किया गया। विभिन्न स्तरों (तहों) के मध्य आसंजन की दृष्टि से भी इनका परीक्षण किया गया। इन समस्त गुफाओं में पतली सफेद भित्ति के ऊपर अत्यन्त आकर्षक भित्तिचित्र बने हुए हैं। जिन गुफाओं का अध्ययन किया गया वे हैं

1. डुवांग—सम्भवतः सबसे प्राचीन
2. जेल्मा
3. गांखांग
4. लांग-छिब्बों अथवा डान-टान-पा
5. छम्बा छिब्बो
6. डामलांग
7. चिलकांग
8. सरलांग—परवर्ती काल की
9. चोमुलांग
10. फू

जैसा कि पहले कहा जा चुका है छतों के ऊपर संचित हिम जल के कारण कच्ची ईंटों की दीवालों, रंजकों तथा पलस्तर को काफी क्षति पहुँची है और अन्ततः जल भित्ति चित्रों तक पहुँच गया है। इन भित्तिचित्रों का बन्धक पदार्थ जल विलेय होने के कारण जल के सम्पर्क में आने पर फूलता है और इस प्रकार आयतन में वृद्धि के कारण रंगों (वर्णकों) को अस्तव्यस्त करता है। कुछ भित्तिचित्रों में यह जलचिन्ह सरलता से देखा जा सकता है (चित्र 4), गुफाओं के भीतर आकस्मिक ताप परिवर्तन, जो अग्नि जलाने के कारण होता है, टेढ़े पड़ने की प्रवृत्ति, ऊर्णन आदि ऐसी गंभीर समस्यायें हैं जिनसे हमें पाला पड़ता है। कभी-कभी मोटी-मोटी परतों के रूप में कजली का काफी मोटा संचय भी देखा जाता है जो अनेक गुफाओं के विनष्टीकरण का कारण बनता है। विभिन्न परतों में बन्धन-शक्ति में क्षरण भी देखा जाता है



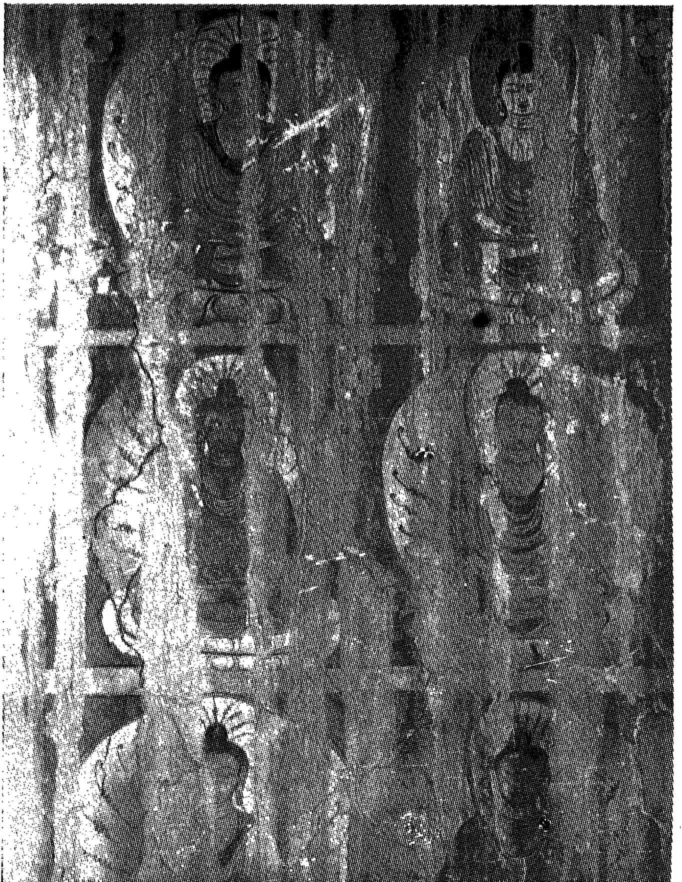
चित्र 1. टाबो मठ का सामान्य दृश्य



चित्र 2. डुवांग गुफा में दरारें दिखाई पड़ रही हैं



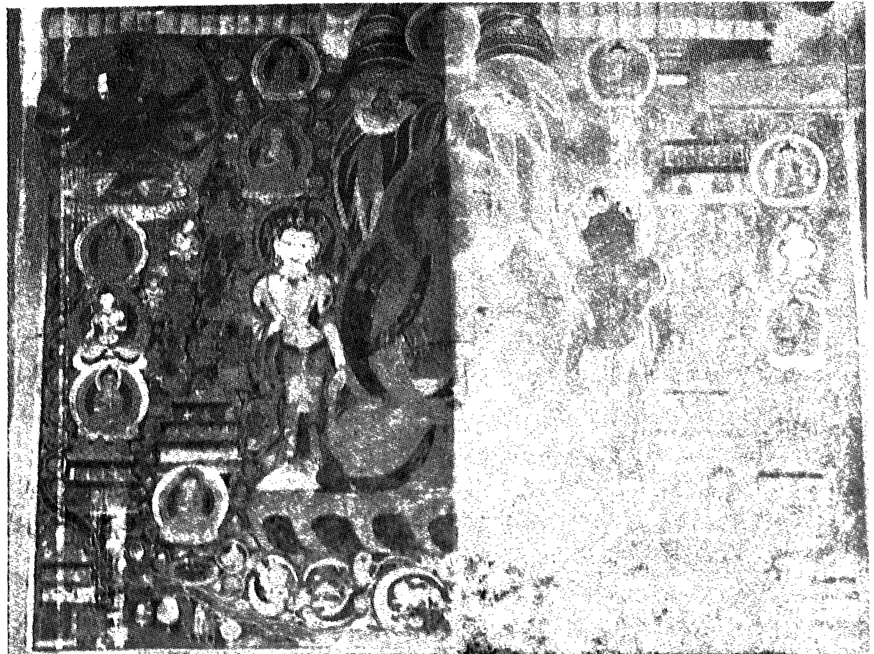
चित्र 3. डुवांग गुफा की विक्षत छत



चित्र 4. डुवांग गुफा के भित्ति चित्रों में जल चिन्हों के अवशेष



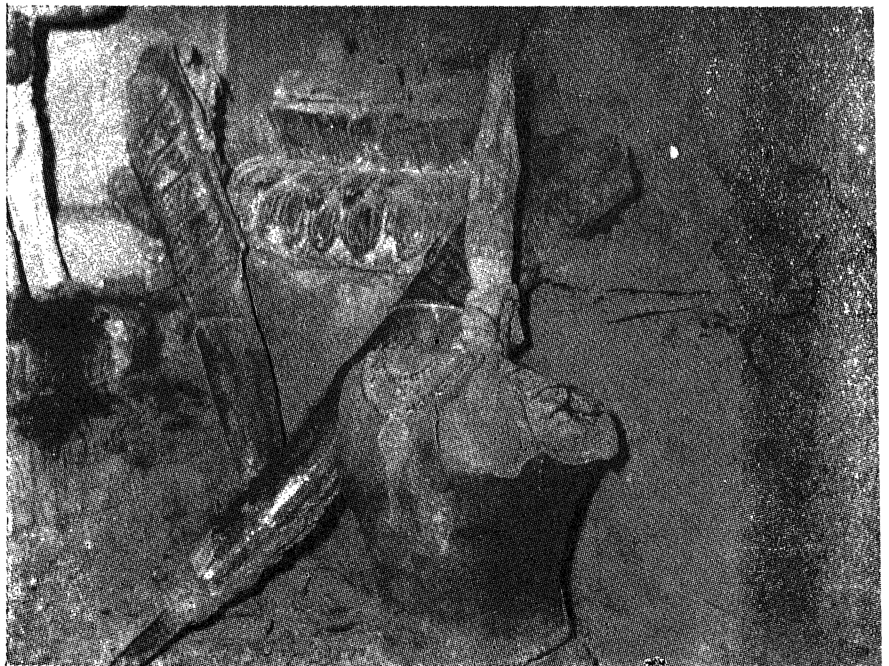
चित्र 5. डुवांग गुफा की भीतरी छत



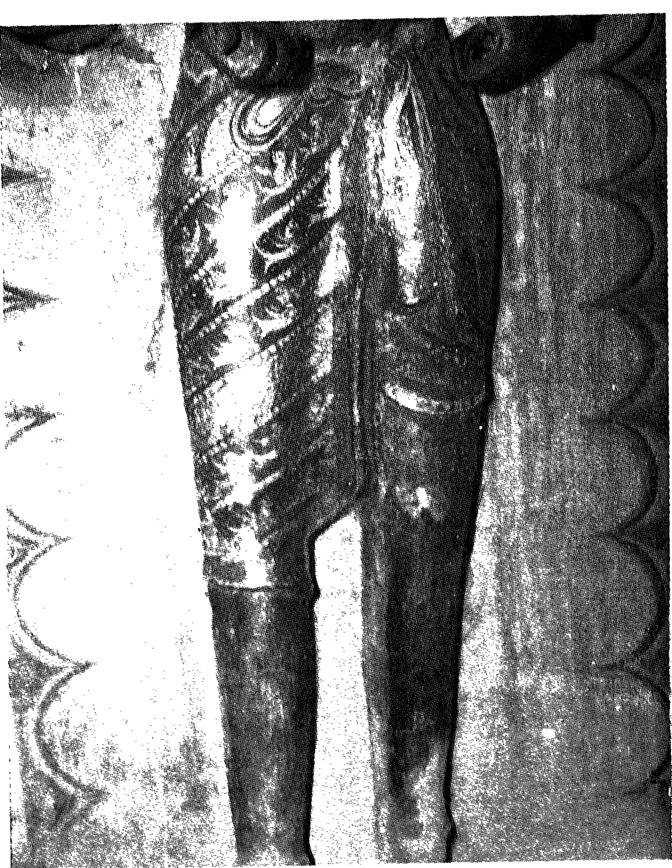
चित्र 6. भित्ति चित्र, (बाईं ओर) रासायनिक उपचार से मूलचित्र स्पष्ट दिखते हैं ।



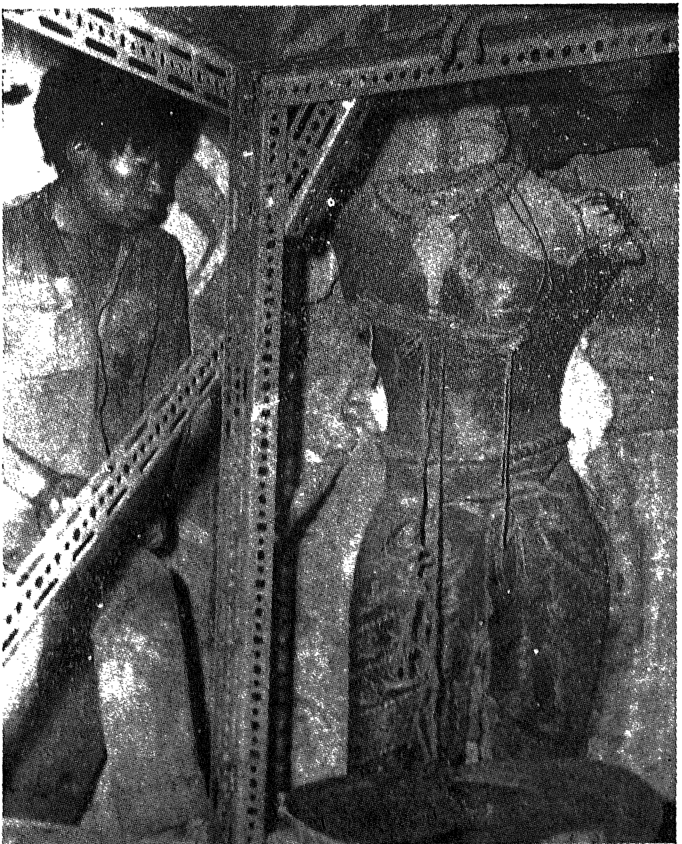
चित्र 7. भूकम्प के पूर्व डुवांग गुफा में वज्रपाणी की मृन्मूर्ति



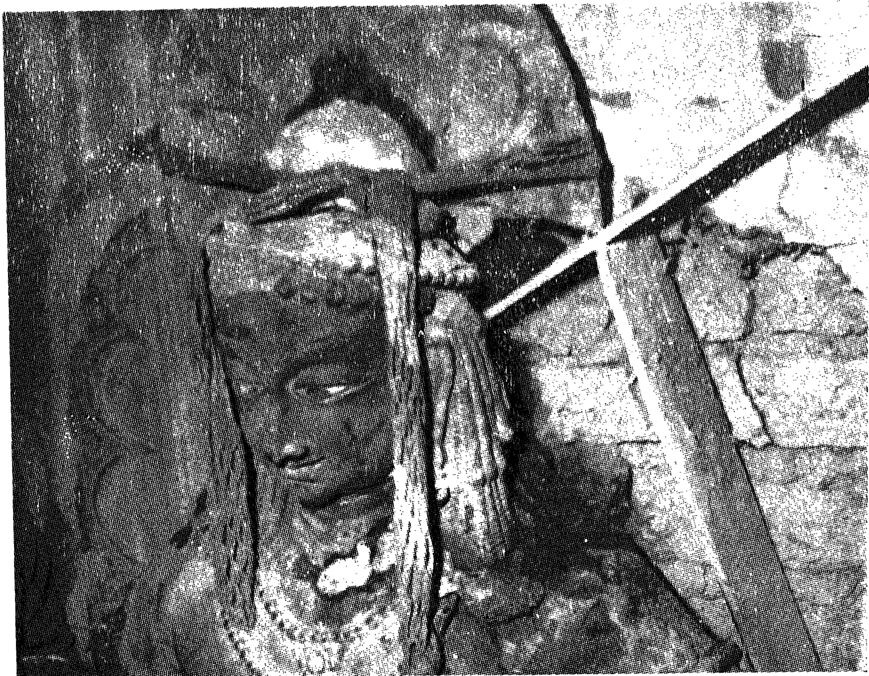
चित्र 8. वज्रपाणि की भग्नमूर्ति



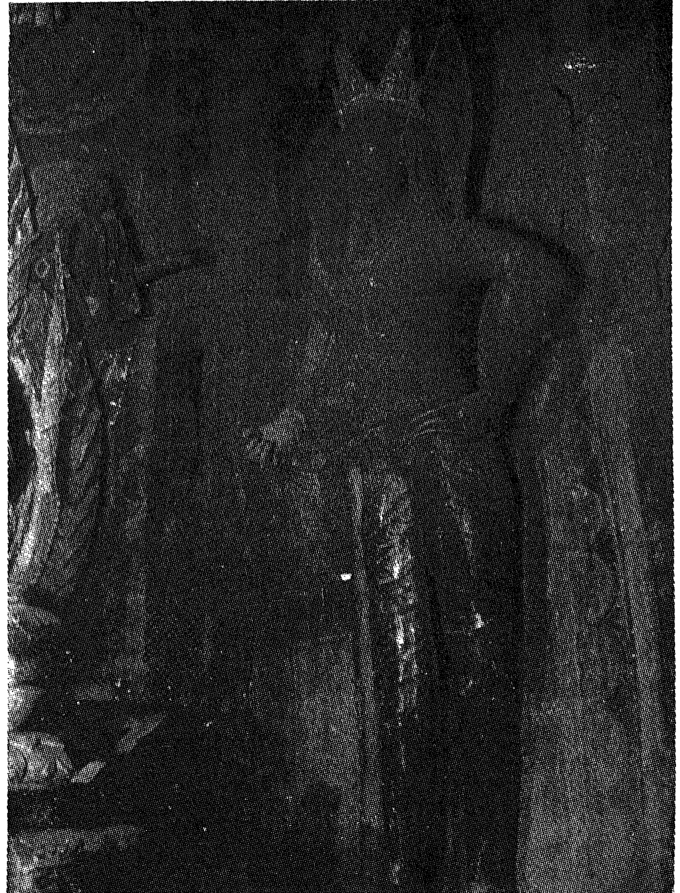
चित्र 9. वज्रपाणि की मूर्ति का अलंकृत पादभाग



चित्र 10. भग्नमूर्ति के पुनर्निर्माण का दृश्य



चित्र 11· वज्रपणि मूर्ति के शिरोभाग का पुनर्निर्माण दृश्य



चित्र 12. वज्रपाणि की मूर्ति : पुनर्निर्माण के पश्चात्

जिसके फलस्वरूप अनेक भित्ति चित्रों में गुल्लक बन गये हैं। अनेक भूकम्पनों के फलस्वरूप कच्ची ईंट की दीवारें बुरी तरह से हिल चुकी हैं जिससे उनमें दरारें आ गई हैं। ये दरारें किसी एक क्षेत्र में सीमित न रहकर कभी-कभी ऊपर से लेकर नीचे तक तथा भित्तिचित्रों के आर-पार चली गई हैं। कई स्थानों में महीन कच्चा पलस्तर उखड़ गया है अतः यह उचित ही था कि रासायनिक उपचार के साथ ही साथ गड्ढों, छिद्रों तथा क्षतिग्रस्त रंजित पलस्तर के दन्तुर किनारों की बड़े पैमाने पर मरम्मत भी होती चले। अतीव कीचड़ से बनी गुफाओं की संरचनात्मक सुरक्षा के कार्य को भी प्राथमिकता दी गई है। डुवांग गुफा की सम्पूर्ण छत को खोदकर पालीथीन की दुहरी परत लगा दी गई जिससे छत जल-सह्य हो जाय। कुल मिलाकर जो रासायनिक संरक्षण कार्य हुआ वह इस प्रकार था :

(अ) 1. चित्रों की सफाई तथा धूल एवं कीचड़ को हटाना
2. धुँआ तथा तारकोल जैसे जमाव को हटाना
3. तैल, घी इत्यादि के कारण चिकने हिस्सों को हटाना
4. उपयुक्त संश्लिष्ट आसंजक के द्वारा काष्ठमय सतह पर वस्त्र का आसंजन
5. शिथिल वर्णकों का स्थिरीकरण तथा
6. समस्त रंजित पृष्ठ का पालीविनिल ऐसीटेट रेजिन द्वारा संरक्षण।

इसके साथ ही संरचनात्मक संरक्षण का कार्य भी सम्पन्न किया गया है जो निम्नवत् था

(आ) 1. शिथिल पलस्तर का माडलन तथा दृढ़ीकरण। भूकम्प के कारण पड़ी दरारों को भरने का कार्य
2. किनारों की सिरबन्दी
3. रंजक स्तर तथा पलस्तर स्तर में रिक्त स्थानों की पूर्ति तथा
4. जोड़ों, दीवालों की संधियों को पूरना।

4. चित्रकारी की प्रकृति तथा प्रविधियां

कीचड़ के पलस्तर पर ये चित्रकारियाँ डिस्टेम्पर प्रविधि से की गईं। कच्ची ईंटों के ऊपर कीचड़ का पलस्तर चढ़ाया गया है और फिर इसे समतल किया गया जिससे रंग चढ़ाया जा सके। इस पलस्तर की समतल सतह के ऊपर चूने की पतली तह चढ़ाई गई। इसमें जिस बन्धक पदार्थ का प्रयोग किया गया वह अ-प्रोटीन प्रकृति का वानस्पतिक गोंद था। अनेक तरह के रंगों का प्रयोग किया गया, यथा हरा, नीला, लाल, काला, भूरा, पीला तथा नारंगी। इन रंगों का स्रोत प्रायः अकार्बनिक तथा खनिज है और इनका गाढ़ा पोत लगाया गया। विभिन्न तहों का आरेख निर्देश हेतु दिया जा रहा है। (देखें पृष्ठ 280 पर)

विभिन्न आकार की आकृतियाँ तैयार की गई हैं। दीर्घतर आकार की चित्र कलाकृतियाँ उच्चतर स्तर पर हैं फलस्वरूप वे मनुष्यों के हाथ की पहुँच से परे होने के कारण अधिक सुरक्षित हैं। इनमें से अधिकांश चित्र जातक कथाओं को चित्रित करने वाले हैं। छत लगभग 5 मीटर ऊँची है। परिरक्षी के रूप

में कोई वार्निश का उपयोग नहीं हुआ प्रतीत होता। वर्णकों का विश्लेषण रासायनिक सूक्ष्मदर्शी तथा अन्य विधियों से किया गया। इनमें नीला वर्णक नील (इंडिगो) पाया गया है। चित्रों में बाद में पर्याप्त पुन: अंकन हुआ है और ये सब अकार्बनिक स्रोत के हैं।

अधिकांशत: भीतरी छत लकड़ी की बनी हुई है (चित्र 5) जिसके ऊपर भूसा तथा कीचड़ मिला कर छत डाली गई है और इसे भी रंग दिया गया है। भीतरी छत को चित्रित करने की प्रविधि यह थी कि कड़ियों में लकड़ी के गुटके रखकर उन पर मानव, पशु तथा अन्य चित्र बना दिये गये थे।

ये समस्त मठ जीवित स्मारक हैं अत: ऐसी समस्यायें उपस्थित करते हैं जो इनकी अपनी विशेषतायें हैं।

5. रासायनिक उपचार

इन भित्तिचित्रों के रासायनिक उपचार एवं परिरक्षण को लेकर कुछ अत्यन्त जटिल समस्यायें सामने आईं क्योंकि ये मिट्टी के गारे पर बने हैं और रंग ग्रहण करने के लिए उन्हें महीन चूने से पोता गया है। रसायनों की एक लम्बी सूची व्यवहृत की गई; ऐल्कोहल, ऐसीटोन, ऐमिल ऐसीटेट, टोल्वीन, पेट्रोलियम ईथर, ट्राइएथेनॉलऐमीन, सेल्यूसाल्व, मेथिल एथिल कीटोन तथा ये अत्यन्त उपयोगी सिद्ध हुये क्योंकि चित्रों की सामान्य सफाई, कजली, धूल तथा ग्रीज का विलगाव अच्छी तरह हुआ। पृथक-पृथक विलायकों की बजाय उनका मिश्रण प्रयुक्त करने पर भी अच्छे परिणाम प्राप्त हुये। इस उपचार के फल-स्वरूप मूल चित्र स्पष्ट हो गये (चित्र 6)। चित्रों की सफाई रासायनिक के साथ ही यांत्रिक प्रक्रम होती है। प्राय: जो क्रिया होती है उसमें उभाड़ घुलते हैं और फिर स्थूलत: विलग होते है। रसायनों को विभिन्न अनुपातों में मिलाकर प्रयुक्त करने पर रंग (वर्णक) तह पर कोई हानिकारक प्रभाव नहीं पड़ा। इस प्रकार से चित्र कलाकृतियाँ अपनी वास्तविक चमक प्राप्त कर सकी हैं। सफाई करने के बाद इन्हें टोल्वीन में 3% पालीविनिल ऐसीटेट के द्वारा लेपित करके परिरक्षी सतह प्रदान की गई। टैबो मठ के भित्तिचित्रों को प्रलेपित करने के लिए उपयुक्त श्यानता का पालीविनिल ऐसीटेट प्रयुक्त हुआ। इस संश्लिष्ट प्लास्टिक की विशेषता है इसकी उत्क्रमणीयता जो परिरक्षण का मूल सिद्धान्त है। यद्यपि कालान्तर में यह कुछ-कुछ पीला पड़ जाता है लेकिन वर्णक के रंगाभास (छाया) के साथ अच्छी तरह मिल जाता है। इस प्रलेप की संरचना बहुलकी होती है और सरल एकलकों की पुनरावृत्ति के संजाल या दीर्घ श्रृंखला से बना होता है। यह एक अच्छा परिरक्षी है लेकिन कोई भी पदार्थ स्थायी नहीं कहा जा सकता। यदि टोल्वीन में मेथिल मेथैक्रिलेट को व्यवहृत किया जाय तो अर्धपारदर्शकता दिखाता है और धूल को आकर्षित करता है।

संधियों को भरने के लिए पेरिस के प्लास्टर को अन्त:प्रविष्ट किया गया। उपचार के बाद प्लास्टर के खंडित सिरों की सिरबन्दी पेरिस के प्लास्टर तथा पॉलीविनिल ऐसीटेट के मिश्रण से की गई। उचड़े हुए रंजकों को सावधानी से उनके स्थानों पर 3-5% पॉलीविनिल ऐसीटेट की सहायता से स्थापित कर दिया गया।

6. मृन्मूर्तियों की मरम्मत तथा पुनरुद्धार

जो अन्य महत्वपूर्ण कार्य किया गया वह था डुवांग में थुजेन थाप की वृहदाकार मूर्ति की मरम्मत और पुनरुद्धार। यह मूर्ति भूकम्प में टूट गई थी। छम्ब छिबो की वृहद् मृन्मूर्ति क्षतिग्रस्त हो गई थी जिसकी मरम्मत सम्पीडन तथा बलवर्धक छड़ों को प्रविष्ट करके की गई।

7. डुवांग गुफा में थुजेन थाप की मृन्मूर्ति की मरम्मत (चित्र 7)

जैसा कि पहले से सूचना है, इन गुफाओं में अनेक मृन्मूर्तियाँ पाई जाती हैं। इनमें से सर्वाधिक महत्वपूर्ण है थुजेन थाप (वज्रपाणि) की मूर्ति जिसे 1965 में उस रूप में फोटोग्राफ किया गया था जिस रूप में वह खड़ी थी (चित्र 7)। इसकी लम्बाई 2·04 मीटर है। हाल ही के भूकम्प में यह मूर्ति गिर कर खण्ड-खण्ड हो गई। यह पहले दीवाल से पृथक हुई और फिर खण्डों में बिखर गई (चित्र 8)। यह मूर्ति अत्यन्त अलंकृत है और महीन पच्चीकारी से युक्त है (चित्र 9)। इसके कुछ अंश चूर्णित हो गये हैं और इनकी पुनः रचना की जानी है (चित्र 10)। मिट्टी की सहायता से निम्नलिखित खण्डों की पुनः रचना की जा सकी है

1. ग्रीवा से शीर्ष तक खण्डित शिर
2. खण्डित शीर्ष
3. खण्डित कान
4. भुजाओं के खण्ड
5. दोनों पाँव
6. प्रभामण्डल के चार खण्ड
7. दोनों पैरों के दो खण्ड
8. बालों के तथा आभूषणों के खण्ड

इन समस्त खण्डों को साफ किया गया। 1965 में लिये गये फौटोग्राफ से वास्तविक स्थिति जानने में सहायता मिलेगी।

8. प्रविधि

मरम्मत का कार्य क्रमबद्ध रीति से और अधिक से अधिक खण्डों का उपयोग करते हुए की गई।

1. पहले जहाँ मूर्ति स्थापित की गई थी वहाँ पर दीवाल में एक गड्ढा बनाया गया जिसकी गहराई 15 सेमी० थी। ऊर्ध्वाधरतः दीवाल को 2·08 मीटर तक और क्षैतिजतः 20 सेमी० तक काटा गया। फिर एक लोहे की छड़ जिसका व्यास 8 मिमी० तथा लम्बाई 40 सेमी० थी उस गड्ढे में 1.94 मीटर की ऊँचाई पर क्षैतिजतः जड़ दी गई और लकड़ी को कड़ी को यथास्थिति रखने के लिए उसे ठीक से सीमेंट से जोड़ दिया गया।

2. एक लकड़ी की कड़ी (2·04×0·07×0.07 घन मीटर) लेकर उसमें नीचे से 80 सेमी०, 1102 सेमी० तथा 150 सेमी० की दूरी पर तीन छेद बनाये गये। इनमें 30 सेमी० लम्बे तथा 8 मिमी० व्यास वाले लोहे की छड़ें लगायी गयीं।

3. लकड़ी की कड़ी को तार से कई स्थानों पर बाँधा गया जिससे मूर्ति खड़ी रहे।

4. गड्ढे में इस लकड़ी की कड़ी को, जिसमें लोहे की छड़ें तथा तार थे, सीमेंट की सहायता से दृढ़कर दिया गया (1 भाग सीमेंट+3 भाग धुली बालू तथा एक भाग धुली गिट्टी)।

5. पाँव के दोनों खण्डों को सीमेंट प्लास्टर की सहायता से चबूतरे पर स्थिर कर दिया गया।

6. पाँवों को स्थिर करने के बाद टाँगों को लकड़ी की कड़ी में स्थापित लोहे की छड़ के द्वारा सीमेंट का पलस्तर करके यथास्थिति में लाया गया।

7. पाँवों के बाद पूरे शरीर को यथास्थिति में खड़ा किया गया। यह सावधानी बरती गई कि यह मूर्ति गिरे नहीं अतः इसे तार से लपेट कर बाँध दिया गया। पलस्तर की सहायता से जोड़ने का कार्य पूरा किया गया।

8. तब शरीर के ऊपर सिर रख दिया गया और जो भी संधियाँ थीं उन्हें पलस्तर से भर दिया गया।

9. अन्य टूटे अंगों को जोड़ कर यथास्थिति में लाया गया।

10. इस प्रकार मूर्ति को खड़ा करने और भग्न खण्डों को रखने का कार्य पूरा हुआ।

11. जो भाग पूर्णतया चूर्णित हो चुके थे उन्हें फोटोग्राफ की सहायता से पुनः ढाला गया। विलुप्त अंगों को साँचे में ढालने के लिए पेरिस के पलस्तर तथा माविकाल को विभिन्न अनुपातों में मिलाया गया क्योंकि इससे पुख्ता पड़ने की अवधि को नियन्त्रित किया जा सकता है। सीमेंट का बिल्कुल ही प्रयोग नहीं हुआ।

मूर्ति में से धूल तथा ग्रीज़ हटाने के लिए उसे ऐल्कोहल तथा टोल्वीन से रासायनिक विधि से साफ किया गया और फिर उसे मूल रंगों जैसा रंग दिया गया (चित्र 10 तथा 11) (चित्र 12 में अन्तिम रूप दिखाया गया है)।

इसी प्रकार छम्ब छिबो (बुद्ध) की मूर्ति की मरम्मत की गई जिसमें अनेक दरारें थी।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 3, July 1980, Pages 271-283

MURALS OF TABO MONASTERY (DISTRICT : LAHUL & SPITI): PROBLEMS AND THEIR PRESERVATION

By

B.N. Tandon
Archaeological Survey of India, Dehra Dun

Abstract

Problems regarding the preservation of murals of Tabo monastery situated in district Lahul-Spiti have been discussed.

1. *Introduction*

The valley of Lahul Spiti is a remote place situated near the Indo-Tibetan border. Lahul is the North-western part of India and is about 13050 ft. high, Spiti is in the east. This famous monastery is located in Tehsil Kaza district Lahul Spiti. These Budhist monasteries are decorated with beautiful murals of exquisite and impressive beauty as well as number of statues made of mud and painted over with colours. The influence of Tibetan Buddhism is distinctly seen. These monasteries belong to the period between 11 and 13th Cent. A.D. These comprise a large number of Gomphas quite akin to Ajanta Caves and sometimes referred to as Northern Ajanta. The theme is all buddhist.

These Buddhist shrines (Photograph 1) were declared protected in the year 1972 (14th August) and the work of chemical conservation started immediately afterwards on 28.8.1972. The shrines or monuments are about 10 in number. These monasteries are located in the Spiti Valley and are covered all round with snow-clad mountains and the temperature is quite low as a result. All these monasteries remained neglected for centuries together. In addition the valley falls in the Seismic Zone and the earth tremors are quite frequent. The number of these earthquakes have increased in the last several years, ravaging the area of the monasteries and nearby settlements. Some of the tremors which came in 1975-76 were of very high intensity and caused great damage to the gomphas, the walls, floors, roofs, the murals and stucco (Photograph No. 2) (8/9.9.76). Due to urgency of situation some special repairs was done in 1972-73 in Duwong Gompha.

2. *Stratification of the Tabo Murals*

As usual these monasteries are made of mud bricks which have been plastered with mud and over the mud plaster, the paintings have been executed after giving it a very thin lime ground. The roofs of some of the monasteries (photograph No. 3) are made of painted wooden planks and rafter while some of them have plain wooden twig roofs probably due to later repairs.

3. *Deterioration and the Condition of the Murals*

Since the carrier and ground both are made of mud, not much strength in the form of bonding can be expected from them. The climatic conditions of course do not allow much chemical activity in the form of deterioration to take place, hence the only activity is the physical and mechanical damage on account of tremors, failures of the materials used in execution of paintings, human vandalism etc. as well as deterioration on account of vagaries of age and time. Bad environmental conditions like frost, seepage of water etc. are responsible for the deteriorating condition also. In all these monasteries burning of oil lamps, scented sticks etc. are the agency providing the soot and such alike matters. Defects on account of use of wrong materials and faulty structure add to our problems. The condition of 9 Gomphas have been studied in detail to prepare a systematic scientific plan for their proper maintenance, cleaning, consolidation, strengthening and preservation. These were examined for the condition of walls in relation to humidity, capillary action or condensations. These were looked into from the point of view of adhesion in between the different layers etc. All these Gomphas have extremely beautiful murals over the white thin ground, the Gomphas which were taken into account are:

1. DUWONG—Probably Earliest.
2. ZELMA.
3. GONKHONG.
4. LONG-CHHIBBO or DAN-TAN-PA.
5. CHHAMBA CHHIBO.
6. DOMLONG.
7. CHILKANG.
8. SERLONG-Later Period·
9. CHOMULANG.
10. PHOO.

As explained earlier, the pigments, ground (fine and rough) as well as carrier of mud brick wall have suffered extensive damage due to snow water which collects

on the roof and finds its way ultimately on the murals. These murals have a binding medium (gum) which is water-soluble and when it comes into contant with the water, it swells and disturbs the pigments due to increase in its volume, in some cases the water mark is clearly seen (Photograph No. 4). Loss of adhesion due to sudden temperature change inside the Gomphas because of burning of fires, cupping tendency, flaking etc. are serious problems with which we are faced. Deposit of soot sometimes in quite thick layers is yet another deterioration that is noticeable in many of the Gomphas. Deterioration in bonding strength in different layers has also been noted with the result, buldging tendency is also present in many of the murals. Due to various tremors, a large number of cracks developed in the mud-brick-walls which have been badly shaken. These cracks do not limit to a particular area, but sometimes extend to from top to bottom and cross the whole mural paintings. Fine mud plaster has also been detached at several places. It was also in the fitness of things that alongwith the chemical treatment, a large scale repairs of cavities, holes, damaged zigzag edges of the painted plaster is also carried out. Structural conservation of the mud built Gomphas has also been done with the utmost urgency. The entire roof of Diwong Gompha was dug up and double layer of polythene sheet was interposed in over one foot thick mud roof for water tightening the roof. It is emphasized that in view of the extremely difficult conditions and peculiar circumstances, the chemical and structural conservation work was done in close coordination. Therefore, the sum total work of chemical conservation work involved is as following:

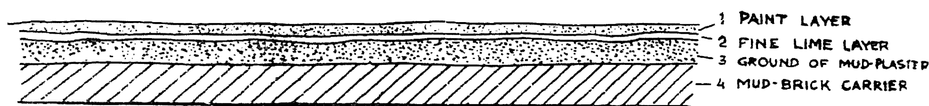
A. 1. Cleaning of the paintings and removal of dust, dirt and mud etc.
   2. Removal of accretions of smoke and tarry matter.
   3. Elimination of greasy portions due to oil, ghee etc.
   4. Adhesion of cloth to the wooden surface, with suitable synthetic adhesives.
   5. Fixing of the loose pigments.
   6. Preservation of all painted surface with Polyvinyl acetate resin.

B. 1. Modelling and strengthening of the loose plaster is yet another extremely important work. Cracks developed as a result of earthquake are to be filled.
   2. Filleting of edges.
   3. Filling in the gaps in paint layer and plaster layer.
   4. Filling the gaps at the joints, walls·

4. *Nature and Techniques of Paintings*

These paintings have been executed in tempera techniques on mud plaster. The mud plaster has been laid on the mud bricks and after which it has been burni-

shed to make it smooth to receive the paint layer. Over the smoothened mud plaster a thin layer of lime has been laid. The binding medium used is non-proteinous in nature and is vegetable gum. A large number of pigments have been used e.g. green, blue, red, black, gray, brown, yellow and orange. These colours are mostly inorganic and mineral in origin and have been used with thick consistency. Schematic sketch of the different layers is given below for reference purposes.



Figures of different sizes have been made. The bigger sized paintings are present at a higher level and hence better preserved because they are out of reach of human hand and have not suffered human vandalism. Most of these paintings depict Jataka stories. The ceiling is about 5 meter high. No varnish seems to have been used as a preservative. The pigments have been analysed by chemical microscopy and other methods. Blue has been found to be Indigo. Paintings show a lot of retouchings of a later period and these are organic in origin.

Mostly ceiling is made of wood (Photograph No. 5) on which husk and mud has been laid to make the roof and these are painted. The techniques of paintings on the ceiling was that small piece of wood were put on rafters and human, animal and other patterns are painted on them.

All these monasteries are living monuments and hence present those problems which are inherent in such cases.

5. *Chemical Treatment*

Chemical treatment and conservation of these murals presented some very complex problems, since these are executed on mud clay plaster and finished with fine lime wash to receive the pigments. A whole range of chemicals was used e.g. alcohols, acetone, amyl acetate, toluene, petroleum ether, triethanolamine, cellusolve, methyl ethyl ketone and these were found quite successful as the photographs indicate for the general cleaning, removal of soot and grease, dust and dirt. Mixture of the chemicals showed much better results than single ones. Treatment brought the originals to view (Photograph No. 6). The cleaning of paintings was both a chemica and mechanical process. Dissolving the accretions and then physically removing them is the usual course of action. The chemicals have been used in different proportions without producing any deleterious effect on the paint layer, thus exposing the paintings in its true glory. After the cleaning operation, these paintings are coated

with 3% of Polyvinyl acetate in toluene, to provide a protective layer. Polyvinyl acetate in proper viscosity has been used as a surface coating in the murals of Tabo Monastery. The main advantage of this synthetic plastic is reversibility which is one of the basic tenets of conservation. Though in the long term it shows a slight yellowish tendency, but then it goes very well with the tone of pigments. This coating has a polymeric structure and is made of long chain or network of simple repeating monomers. This is a good preservative but of course no material is permanent. Methyl methacrylate in toluene showed a tendency to translucency and attracted a lot of dust.

Filling the gaps where the cavities are created by mechanical stress and strain was done by injecting plaster of Paris at different levels and after giving the support from the front. After the treatment, the broken edges of the plaster were filleted and this was done by a mixture of plaster of Paris and polyvinyl acetate. Loose pigments were carefully put into their position with the use of 3 to 5% of Polyvinyl acetate.

6. *Repairs and Restoration of Clay Statues*

Another very important work which has been attended was the repairs and restoration to big image of Thujen Thop in Duwong which was broken in earthquake. The big clay image of Chhamba Chhibo had suffered damage and was repaired by pressing and introduction of strengthening rods.

7. *Repair of the Clay Statue of Thujen Thop (Vajrapani) in Duwong Gompha*

As reported earlier these Gomphas contained a large number of clay statues, one of this most important being the statue of Thujen Thop (Vajrapani) which was photographed in 1965 as it stood at that time (Photograph 7). The length of this statue is 2.04 metres. During a recent earthquake, this statue fell down and was broken into several pieces. It first got detached from the wall and then broken into pieces (Photograph 8). A few photographs will indicate the complex nature of the work. This figure is most ornamented and intricately carved (Photograph No. 9). Some parts were completely reduced to powdery form and have to be reconstructed (Photograph 10). The following ieces were recovered from the heap of mud.

1. Broken head from the neck to crown.
2. Broken crown piece.
3. Torso with a wooden rod.
4. Broken ears.
5. Pieces of arms.
6. Both legs.

7. 4 pieces of halo.
8. 2 pieces of both feet.
9. Small pieces of hair and ornamental mouldings.

All these pieces were cleaned. A photograph taken in 1965 will serve as an indication to the real position.

8. *Technical Procedure*

The repair was taken up systematically and to utilize as many pieces as possible of the old statue.

1. A groove was made in the wall where the statue was installed previously, the depth of the cut was 15 cms. Vertically the wall was cut about 2.08 m. and horizontally about 20 cms. and iron bar 8 mm. in diameter and 40 cms. in length was fixed horizontal at a height of 1.94 meters in the groove and cemented properly to keep the wooden rafter in position.

2. A wooden rafter 2.04×0.07×0.07 cubic meter was taken and three holes were made in it at the distance from the bottom of rafter at 30 cms., 1.102 cms. and 150 cms. In these holes iron rods of 8 mm. in diameter and 30 cms. in length were fixed.

3. The wooden rafter was tied with the wire at several places in order to hold the figure.

4. This wooden rafter having the iron rods and wire was fixed into the groove with the help of cement. (One part cement and three parts washed filtered sand and one part of washed grit).

5. Both the pieces of feet were fixed on the pedestal with the help of cement plaster.

6. After fixing the feet, legs were put in position with the help of cement plaster using iron rod of the wooden rafter.

7. After the legs then the whole body of the Tarso was put in position, precaution was taken that this may not fall down and hence it was wrapped and tied with wire. The joining was done with the plaster as in the previous case.

8. The head was then placed on the body and gaps and voids filled with plaster.

9. Other broken pieces were joined and placed in the proper position.

10. In this way the work of erecting the statue and putting the broken pieces was completed.

11. There were some parts which were completely reduced to powdery form were recast with the help of photographs.

Plaster of Paris and movicol in different proportions (4x1) for moulding the missing parts was used instead of cement, as it has the advantage of having a setting time which could be controlled and intricate designs could be made on it.

The statue was chemically cleaned with alcohol and toluene to remove dust, dirt, soot and grease and then retouched to their original colours (Photograph 10 and 11).

(Photo 12 shows the final figure)

In the same way the statue of Chhamba Chhibo (Buddha) which showed a lot of fracture were also repaired.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 3, July, 1980, Pages, 285-290

कलाकृतियों का वैज्ञानिक विश्लेषण

मैदेलीन आर्स
चीफ कनजर्वेटर आफ नेशनल म्यूजियम, चीफ आफ रिसर्च लैबोरेटरीज
आफ फ्रांस म्यूजियम

[प्राप्त—जनवरी 10,1980]

सारांश

पाश्चात्य देशों में कलाकृतियों को वह महत्व प्राप्त नहीं है जो आध्यात्मिक विषयों को है। लेकिन प्राच्य देशों में कलाकृतियों को अत्यधिक महत्व प्रदान किया जाता रहा है। यही कारण है कि उनका वैज्ञानिक विश्लेषण भी त्वरा से सम्पन्न होने लगा और डा० सत्य प्रकाश ने इस क्षेत्र में महत्वपूर्ण योगदान किया है।

प्राचीन कलाकृतियों का वैज्ञानिक विश्लेषण न केवल उनके संरक्षण की दृष्टि वरन् इन कलाकृतियों के संदेश को जन-जन तक पहुँचाने के लिये भी आवश्यक है। यद्यपि इस दिशा में अपेक्षित प्रविधि का विकास हुआ है किन्तु शोध कार्य इक्का-दुक्का तथा व्यक्तिगत प्रयास जैसा रहा है।

Abstract

Reflections on the Scientific analysis of art materials. *By* Madeleine Hours, Director of National Museum, Research Laboratories of Museum, France.

The work of art is 'material' first, then an esthetical or spiritual message. it is also a witness of the past civilisation, and for this reason it is necessary to mobilize all the available resources to decode this message.

In the West there has been a tendency, under the Christian influence, to give superioriety to the spiritual aspect as a result of which the material aspect of the work of art has been neglected. This attitude has persisted and still persists with certain

historians who consider the historical criterion as the only mode to approach the work of art. On the contrary, researchers and archeologists of Oriential and extreme Oriental civilisations have a better understanding of the material side and its internal organisation of the work of art. That is why, it appears that between the great path of history and of poetic sensibility, the scientific analysis has very quickly taken a dimension as the works of Professor Satya Prakash have gloriously demonstrated.

The scientific analysis is very essential not only for the conservation of the work of art but also for the better perception of its message and for the discovery of the deep motives of the artists. Much work in the direction of the development of the requisite technology have been done with very useful applications yet the researches have so far been sparadic and often very individualistic.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 3, July, 1980, Pages 285-290

REFLEXIONS SUR L'ANALYSE SCIENTIFIQUE DES OEUVRES D'ART

Madeleine HOURS
Conservateur en Chef des Musées Nationaux
Chef du Laboratoire de Recherche
des Musées de France

L'oeuvre d'art est "matière" avant d'être "message" esthétique ou spirituel; elle est également un témoin des civilisations du passé et à ce titre mérite de mobiliser tous les moyens dont notre temps dispose pour déchiffrer ce message.

L'Occident a toujours eu tendance à donner, sous l'influence des penseurs chrétiens du Ier millénaire, la primauté au spirituel, ce qui est naturel mais qui malheureusement va de pair avec un certain mépris de la matière. Cette attitude se retrouvait et se retrouve encore chez certains historiens pour qui la critique historique reste, associée ou non à la sensibilité poétique. le seul mode d'approche de l'oeuvre d'art.

Il fallut que les scientifiques se penchent, depuis le XVIIIème siècle, sur les problèmes d'analyse et de conservation pour que l'on admette en Occident que l'analyse scientifique des oeuvres d'art est une voie nouvelle qui permet non seulement d'améliorer la conservation des objets mais également d'en percevoir le message, d'éclairer les problèmes de sa technologie et parfois même de découvrir les pulsions profondes de l'artiste.

Par contre il noun semble que les chercheurs, les archéologues, relevant des civilisations orientales et extrême—orientales, ont pu par une habitude ancestrale mieux mesurer que leurs collègues occidentaux la part essentielle dans la génèse de l'oeuvre d'art de la matière et de son organisation interne par la main de l'homme. La qualité et l'intéret portés à la pâte des céramiques orientales, les qualités du graphisme d'un artiste sont percus plus aisément, nous semble-t-il, en Orient qu'en Occident, ce qui explique qu'entre la grande voie de l'histoire et celle de la sensibilité poétique, l'analyse scientifique ait pris très vite une dimension que les travaux due Professeur Docteur Satya Prakash ont magistralement démontré.

L'archéologie sur le terrain a depuis quelques années déjà inséré l'apport des méthodes scientifiques dans sa démarche archéologique, la prospection magnétique et la détection aériene ont rendu à l'archéologie de terrain des services qui ne sont plus à démontrer. Les méthodes de datation par le carbone 14 pour les matériaux organiques, par la thermorémanence et la thermoluminescence pour les céramiques ont un mérite qui n'est plus discuté, mais le rôle des méthodes scientifiques d'analyes n'en est qu'à ses débuts dans l'étude, l'exploitation des objets de musées qui sont souvent regroupés par série. Il est èvident qu'il n'est plus possible de se contenter de publier les objets d'art assortis d'une description historique et esthétique, l'objet doit désormais être analysé dans sa structure et situé dans l'évolution de la technologie qu'il illustre. Je ne ferai que citer un exemple : des oeuvres ont été inscrites dans de nombreux catalogues comme étant en or sur des inventaires publiés au XIXéme siécle alors que l'analyse a révèlé qu'elles étaient constituées d'électrum (alliage d'or contenant une grande quantité d'argent). De même les objets intitulés "bronze" dans les anciens inventaires l'ont été le plus souvent en fonction de leur seul aspect à l'oeil : couleur, patine, corrosion. En fait, les analyses systématiques, désormais indispensables, effectuées au moyen des méthodes de spectrographie d'émission dans l'ultraviolet, de spectrométrie de masse, d'activation neutronique, de diffraction X, ou encore de microfluorescence X, permettent de donner de l'objet une description précise des matériaux qui le constituent d'une part, d'éclairer l'évolution de la technologie de la métallurgie antique d'autre part, de préciser par le dosage des impuretés ou des traces les origines éventuelles des minerais, etc...

Le nombre considérable des analyses exécutées dans les laboratoires de musées obligent maintenant à entrer la majorité des données d'analyses sur ordinateur (Musée du Louvre ou British Museum). Le traitement de ces données par des méthodes mathématiques telles que l'analyse factorielle des correspondances peut permettre d'exploiter les résultats en fonction de facteurs chronologiques ou géographiques et par là même permettre le regroupement d'objets provenant de mêmes ateliers et parfois de nous éclairer sur les voies du commerce dans l'Antiquité. L'étude conduite au Louvre d'une part sur les objets conservés au Département des Antiquités Orientales et d'autre part sur des minerais provenant d'anciens sites exploités en Iran dans l'Antiquité semble donner des résultats positifs et aide à mieux connaitre la métallurgie ce cette région; mais ce type de travaux implique une collaboration étroite entre l'archéologue, l'historien, le physicien, l'informaticien, elle demande à chacun une certaine abnégation, en effet il y a là un probléme difficilement compatible avec la formation spécialisée enseignée de notre temps dans les universités, le langage des savants qui maitrisent cependant la même langue, peut etre bien différent selon que leur formation est à l origine technique ou littéraire. Il faut insister, nous semble-t-il. sur la nécessité d'une concertation, d'un respect des opinions des autres, d'une morale

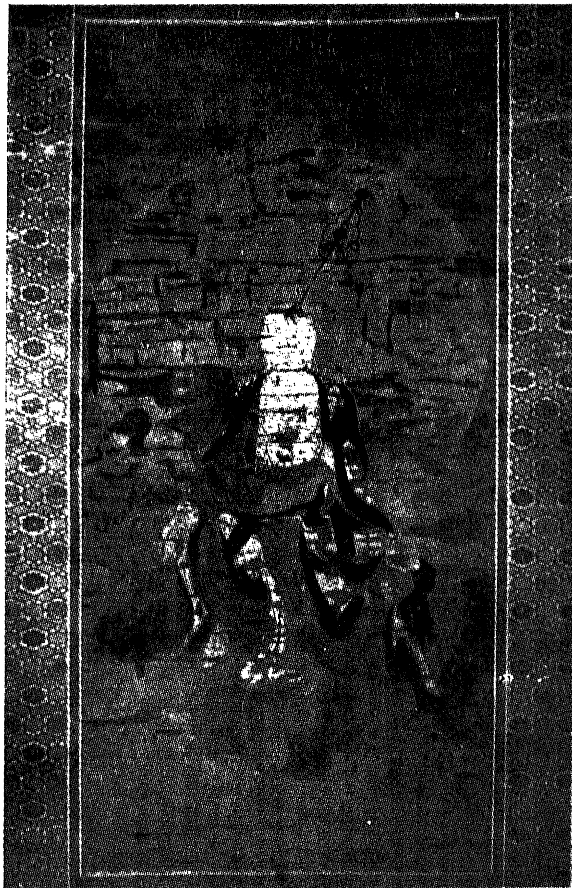


Fig A Perutune clinoise Boudhique
Elogue Han musee guimet.



Fig B. Peruture clinoise Boudhique
Eloque Han Musee guimet.

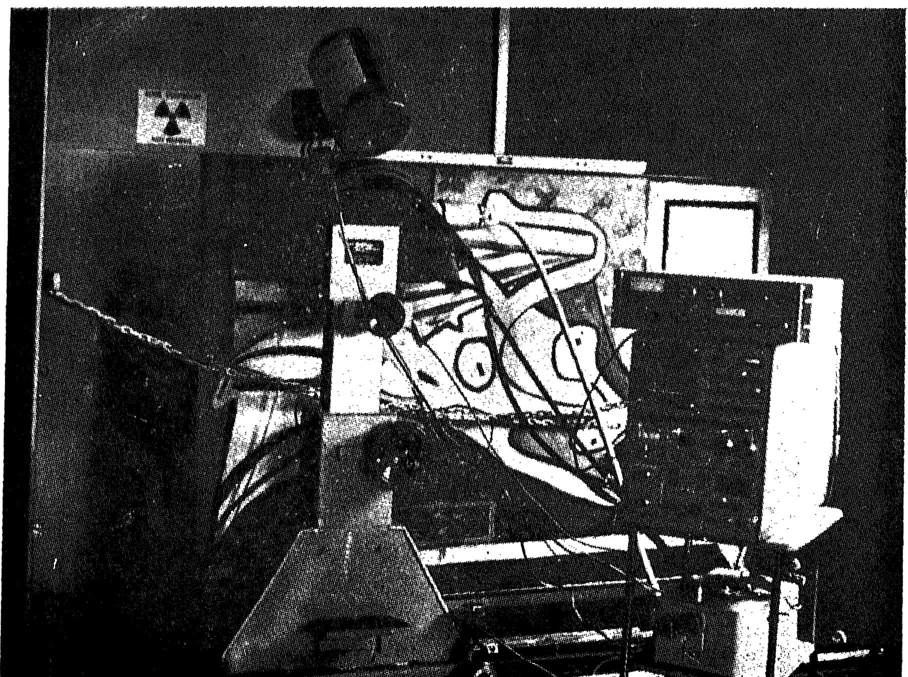


Fig C Affagrcil de microfluorescene X

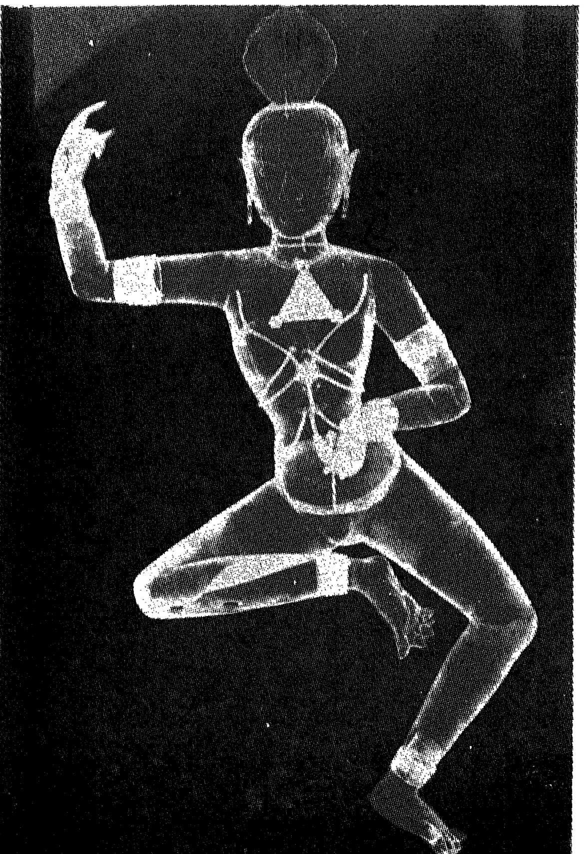


Fig D Photographie de la Radiographie a' une statue de "Daikini"

qui seule peut permettre aux historiens et aux physiciens d'exploiter avec maximunum d'efficacité les données fournies par les méthodes sophistiquées dont nous disposons désormais pour explorer l'oeuvre d'art ou le matétiau archéologique.

Quelques documents tirés de nos dossiers doivent permettre de montrer mieux que par des mots l'enrichissement que les méthodes physico-chimiques apportent à la connaissance de l'oeuvre.

"Si l'on admet que les techniques scientifiques d'analyse de l'oeuvre ouvrent une voie nouvelle qui vient compléter la démarche historique et l'intuition poétique, il faut apporter à ce mode d'exploration une méthode qui lui manque encore car la recherche, dans ce domaine, reste sporadique et parfois trop individuelle." (*)

Ce que j'écrivais alors en 1976 est encore valable pour que de plus en plus la concertation existe à l'échelon national et même international.

Cependant les images que nous venons de présenter, les documents obtenus par les méthodes que nous avons évoquées dans cet article peuvent après une rapide initiation être utilisés par le restaurateur et l'historien, alors que les analyses, les graphiques obtenus par les méthodes physico-chimiques nécessitent le relais du physicien ou du chimiste; le fruit de ces investigations, les résultats de ces analyses sont riches d'enseignements tant pour l'étude de l'histoire de la technique, que rèvèlateurs du métier et du comportement de l'artisan ou de l'artiste.

Enfin nous pensons que c'est à l'étroite collaboration de l'historien avec le restaurateur et le scientifique qu'il appartient désormais de faire progresser ces recherches qui tendent à mieux connaître, mieux conserver les oeuvres qui sont le témoignage du passé.

Peinture chinoise d'époque Han (figures A et B)

La photographie scientifique sous ultra-violet apporte une contribution certaine à la conservation et à la restauration des oeuvres d'art. C'est ainsi que la photographie sous ultra-violet (figure A) de cette peinture chinoise d'époque Han, conservée au Musée Guimet à Paris, met en évidence sous forme de tâches sombres tous les repeints moins nettement perceptibles que sur l'image en lumiére directe (figure B). C'est un bon exemple de l'apport des radiations électro-magnétiques à la connaissance de l'état des peintures.

Appareil de microfluorescence X (figure C)

L'appareil de microfluorescence X mis au point au Laboratoire de Recherche des Musées de France a été concu en fonction des caractéristiques propres aux

(*) Extrait de "Analyse Scientifique et Conservation des Peintures" par Modeleine Hours, Office du Livre, Fribourg (Suisse) 1976.

recherches muséologiques. Ses performances se situent entre celles de la microsonde électronique et celles du spectromètre classique de fluorescence X. L'intèret de la microfluorescence de rayons X réside dans le fait qu'elle permet d'opérer directement sur une peinture. D'autre part, et cela est essentiel, elle cst totalement non destructive. L'échantillon peut être récupéré aprés l'analyse et son étude poursuivie par d'autresprocédés.

Examen Radiographique D'une Status de "Daikini" (figure *D*)

Les radiographies de l'ensemble de la statu e montrent qu'elle est composée de dix parties principales réunies par des fixations mobiles. Certaines jonctions effectuées par un system d'emboitement sont masquées par les brassards et les anneaux de chevilles. Il apparait que ces différentes parties sont elles-mêmes constituées par 34 morceaux de métal assemblés les uns aux autres par des soudures en forme de créneaux.

On constate que le métàl de la majeure partie de la sculpture est travaillé par martelage, dont les traces de l'outil forment des zones moins denses visibles sur les clichés, alors que les oreilles sont coulées en plein et les mains coulées en creux dan lesquelles il persiste le noyau.

En outre on distingue des restaurations au niveau des doigts de la main droite.

Conditions d'obtention:

120 kV 10 mA Temps : 3 minutes Distance : 2,20 mètres Film : Structurix D7 Agfa-Gevaert avec écrans au plomb 0,10 mm.

लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कर्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सकेंगे।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
   पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
   फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०, **जाइट फिजिक० केमि०**, 1928, **150**, 80।

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) बिना मूल्य दिये जायँगे। इनके अतिरिक्त यदि और प्रतियाँ लेनी हों, तो लागत मूल्य पर मिल सकेंगी।

10. लेख **"सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2"** इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

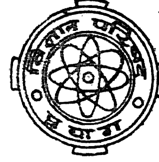
प्रबंध सम्पादक

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr. Sheo Gopal Misra,
M. Sc., D. Phil., F. N. A. Sc



वार्षिक मूल्य : 8 रु० या 20 शि० या 4 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 2 रु० या 5 शि० या 1 डालर

Annual Rs. 8 *or* 20 sh. *or* $ 4
Per Vol. Rs. 2 *or* 5 sh. *or* $ 1

मुद्रक :
के० राय, प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली एवेन्यू, प्रयाग

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्, प्रयाग
801229

Vijnana Parishad
Anusandhan Patrika
विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका

Vol. 23 | October, 1980 | No. 4



The Research Journal of the Hindi Science Academy
Vijnana Parishad, Maharshi Dayanand Marg, Allahabad, India.

विषय सूची

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 4, October, 1980, Pages 291-294

L-टाइरोसीन का अवरक्त स्पेक्ट्रम

एच० एल० गुप्ता, पी० एन० पाण्डेय, सुरेश सी० आमेटा तथा
एम० एम० बोकाडिया

रसायन अध्ययन की पाठशाला, विक्रम यूनिवर्सिटी, उज्जैन

[प्राप्त—दिसम्बर 18, 1979]

सारांश

पर्किन-एल्मर 377 ग्रेटिंग स्पेक्ट्रोफोटोमापी पर KBr गुटिका में 400-4000 Cm^{-1} के क्षेत्र में L-टाइरोसीन के अवरक्त स्पेक्ट्रम का वर्णन किया गया है। विभिन्न विधाओं की कंपन आवृत्तियों को निर्दिष्ट किया गया है।

Abstract

Infrared spectrum of L-tyrosine. *By* H. L. Gupta, P. N. Pande, Suresh C. Ameta and M. M. Bokadia, Vikram University, Ujjain.

The infrared spectrum of L-tyrosine has been reported in the region 400-4000 Cm^{-1} in KBr pellet on a Perkin-Elmer 377 grating spectro-photometer. The assignment of the vibrational frequencies to different modes has been done.

अर्वाचीन वर्षों में, ऐमीनो अम्लों के कंपन स्पेक्ट्रमों के अध्ययन में रुचि बढ़ी है [1-7], परन्तु ऐरोमैटिक ऐमीनो अम्लों, विशेषतः L-टाइरोसीन, के लिये ऐसा शोधकार्य विस्तार से नहीं किया गया। अतः इसका अवरक्त स्पेक्ट्रम लेना और कंपन की विभिन्न विधाओं के प्रति प्रेक्षित मूल आवृत्तियों के निर्देश प्रस्तुत करना वांछित समझा गया।

ऐमीनों अम्ल द्विध्रुव (उभयाविष्ट) आयनों के रूप में रहते हैं और क्रिस्टलीय रूप में ऐमीनो अम्लों की इस संरचना की पुष्टि, L-टाइरोसीन के अवरक्त स्पेक्ट्रम में एक आयनीकृत कार्बोक्सिल समूह तथा एक ऐमीन लवण के कारण प्राप्त अवशोषण पट्टों की उपस्थिति से होती है।

सारणी 1. L-टाइरोसीन की प्रेक्षित मूल कंपन आवृत्तियों के निर्देश

स्थितियाँ Position (Cm^{-1})	तीव्रता Intensity	निर्देश Assignment
462	m	COO^- rocking
482	m	NH^+_3 twisting
490	m	C—C—C ring deformation i. p.
560	s	C—C—C ring deformation i. p.
578	s	C—C.C i. p. bending
600	w	COO^- bending
640 (sh.)	w	COO^- wagging
650	s	COO^- wagging
715	w	C—C—C bending o. p.
740	m	ring breathing
795	m	C—H o. p. bending
805	m	C—H o. p. bending
830	m	C—H o. p. bending
840	s	C—H. o. p. bending
880	m	C.CN. sym. stretching
900	m	C—H o. p. bending
940	w	C—H o. p. bending
965	w	ring breathing
981	w	C—H. o. p. bending
1018	w	C—H o. p. bending
1042	m	C—C stretching
1100	m	ring breathing
1115	m	NH^+_3 rocking
1160	m	CCN asym. stretching
1178	s	C—H i. p. bending
1200	w	CH_2 twisting
1245	s	C—N stretching
1270	s	C—OH stretching

1332	s	$-CH_2$ wagging
1365	s	$-CH_2$ scissoring
1418	s	COO^- stretching
1435	s	ring stretching
1452	s	CH_2- bending
1512	s	C=C stretching
1540 (sh.)	s	NH^+_3 sym. stretching
1590	s	COO^- asym. stretching
1610	s	NH^+_3 deformation
2930	s	C–H stretching
2960	s	C–H stretching
3030	s	C–H stretching
3040 (sh.)	s	C–H stretching
3100-3140	s	C–H stretching

w=weak; m=medium; s=strong; o. p.=out-of-plane: i. p.=in-plane
क्षीण मध्यम प्रबल तल के बाहर तल के अंदर

Bending–वंकन Twisting–व्यावर्तन Stretching–तनन

Wagging–आन्देलित defo rmation–विरूपण Rocking–विकम्पन

Breathing–उच्छ्वसित

प्रयोगात्मक

शोधन के पश्चात् L-टाइरोसीन का S. M. नमूना प्रयोग किया गया। उपर्युक्त स्पेक्ट्रोफोटोमापी पर L-टाइरोसीन का अवरक्त स्पेक्ट्रम लिया गया। अंशशोधन की जाँच पॉलिस्टाइरीन अवशोषण पट्टों से की गई। चौड़े पट्टों की तुलना से सापेक्षतः तीक्ष्ण पट्टों की शिखरों की स्थितियों के माप की यथार्थता अधिक थी।

परिणाम तथा विवेचना

L-टाइरोसीन बिन्दु समूह (Point group) C_1 का अणु है और इसलिये कंपन की सभी विधायें 'a' प्रकार की होंगी। L-टाइरोसीन में 24 परमाणु होते हैं और इनसे 66 मूल कंपन विधायें प्राप्त होंगी।

L-टाइरोसीन के कंपन की विभिन्न मूल विधाओं की आवृत्तियों के निर्देश में, कई ऐमीनों अम्लों के कंपन स्पेक्ट्रमों में पूर्व अध्ययन के परिणामों का उपयोग किया गया है[6-10]। कंपन की सामान्य विधाओं में चार भाग होंगे, फेनिल वलय से फेनिल कंपन, –OH, $-COO^-$ तथा $-N^+H_3$ समूह।

कई रिपोर्टें हैं कि बेन्जीन वलय से सम्बन्धित मूल कंपन प्रतिस्थापकों की प्रकृति के प्रति हीनग्राही होते हैं[11] । इन वलय कंपनों का निर्देश मुख्यतः पूर्ववर्णित कार्यों पर आधारित है [12-16] ।

सभी प्रेक्षित मूल आवृत्तियों का सहसम्बन्ध सारणी 1 में दिया गया है ।

निर्देश

1. कोगेल, आर० जे०, ग्रीन्स्टाइन, जे० पी०, विनिट्ज, एम० बर्नबॉम, एस० एन० तथा मेकालम, आर० ए०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1955, **77**, 5708
2. सुबोइ, एम०, ओनिर्शी, के०, नाकागावा, आई०, शिमानौची, टी० तथा भिजुशिमा, एम०, **स्पेक्ट्रो-किम० एक्टा०**, 1958, **12**, 253
3. फुकुशिमा, के०, ओनिशी, टी०, शिमानौची, टी० तथा भिजूशिमा, एस०, **स्पेक्ट्रोकिम० एक्टा०**, 1959, **14**, 236
4. शुबोइ, एम० तथा टाकेनिशी, टी०, **बुले० केमि० सोसा०**, जापान, 1959, **32**, 1044
5. स्टेगर, ई०, टुर्कू ए० तथा मोकोवाइ, वी०, **स्पेक्ट्रोकिम० एक्टा**, 1963, **19**, 293
6. गुप्ता, एच० एल० पाण्डेय, पी० एन०, आमेटा, सुरेश सी० तथा बोकाडिया, एम० एम०, **द विक्रम**, **24**, (प्रेस में)
7. गुप्ता, एच० एल०, पाण्डेय, पी० एन०, आमेटा, सुरेश सी०तथा बोकाडिया, एम०एम०, **जर्न०साइं० रिस०**, (प्रेस में)
8. सालिमॉव, एम० ए०, केनिन, वी० ए० तथा जोसीन, एम० एल०, **जर्न०किम० फिजि०**, 1965, **62** (**3**), 265
9. शंकरनारायन, आर० एन०, कृष्णन, वी० एन० तथा कृष्णन, के०, **जर्न० इण्डि० इन्डि० साइं०**, 1973, **55** (**2**), 66
10. रेडिल, आर० आर० तथा मीफेन, डी० एच०, **स्पेक्ट्रोकिम० एक्टा०**, 1953, **7**, 253
11. अवस्थी, एच०, आमेटा, सुरेश सी० तथा बोकाडिया, एम० एम०, **एक्टा साइंसिया इण्डिया** (प्रेस में)
12. सोजिल्जकोविक, ए० तथा मीफेन, डी० एच०, **स्पेक्ट्रोकिम० ऐक्टा०**, 1958, **12**, 47, 57
13. लैगैन्ज, सी० जी०, लेवास, जे० एम० तथा जोसीन, एम० एल०, **स्पेक्ट्रोकिम० ऐक्टा०**, 1958, **12**, 305
14. वेंकेटस्वरलू, के० तथा राधाकृष्णन, एम०, **स्पेक्ट्रोकिम० एक्टा०**, 1962, **18**, 1433
15. जोशी, जी० तथा सिंह, एन० एल०, **स्पेक्ट्रोकिम० ऐक्टा०**, 1966, **22**, 1501

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 4, October, 1980, Pages 295-298

आइसोनाइट्रोसो कीटोनों की डाइएजो-बेन्जीन क्लोराइड के साथ अभिक्रियाएँ

श्रीमती के० कानूनगो, एम० डी० रत्नाकर तथा पी० बी० चक्रवर्ती
रसायन विभाग, म० ल० बाई कन्या महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—जून 2, 1979]

सारांश

डाइएजो बेन्जीन क्लोराइड सक्रिय मेथिलन यौगिकों से क्रिया करते समय दोनों नाइट्रोजन परमाणुओं को बचाये रखता है[1]। बॉर्जे[2] ने, क्षारीय माध्यम में डाइऐजो बेन्जीन क्लोराइड की कुछ आइसोनाइट्रोसो कीटोनों के साथ अभिक्रियाओं का अध्ययन किया था। संयुग्मन के समय डाइऐजो समूह के दोनों नाइट्रोजन परमाणु हट जाते हैं तथा उत्पाद में, मूल आइसोनाइट्रोसो कीटोन के सक्रिय हाइड्रोजन का स्थान, फेनिल मूलक ले लेता है। आइसोनाइट्रोसो-कीटोन के व्यवहार की, समान संरचना वाले, हाइड्रॉक्सी मेथिलीन कीटोनों से तुलना के क्रम में अपने पूर्व प्रपत्र में हमने[3] आइसोनाइट्रोसो कीटोनों की ब्रोमीन के साथ अभिक्रियाओं का अध्ययन प्रस्तुत किया था। इस प्रपत्र में, इनकी डाइएजो बेन्जीन क्लोराइड के साथ अम्लीय माध्यम में अभिक्रियाएं प्रस्तुत की जा रही हैं। इस अध्ययन में प्रयुक्त आइसोनाइट्रोसो कीटोन निम्नांकित हैं :

(i) आइसोनाइट्रोसो ऐसीटोन ($CH_3—\overset{O}{\overset{\|}{C}}—CH=N.OH$),

(ii) डाइआइसोनाइट्रोसो ऐसीटोन ($HO.N=CH.CO.CH=N.OH$)

तथा (iii) आइसोनाइट्रोसो ऐसीटोफिनोन ($C_6H_5.CO.CH=N.OH$)

Abstract

Reactions of isonitroso kestones with diazo-benzene. *By* Smt. K. Kanungo, M. D. Ratnakar and P. B. Chakravarti, Chemistry Department, M. L. Bai Kanya Mahavidyalaya, Bhopal.

Reactions of isonitrosoketone with diazo-benzene have been carried in acid medium and the products identified.

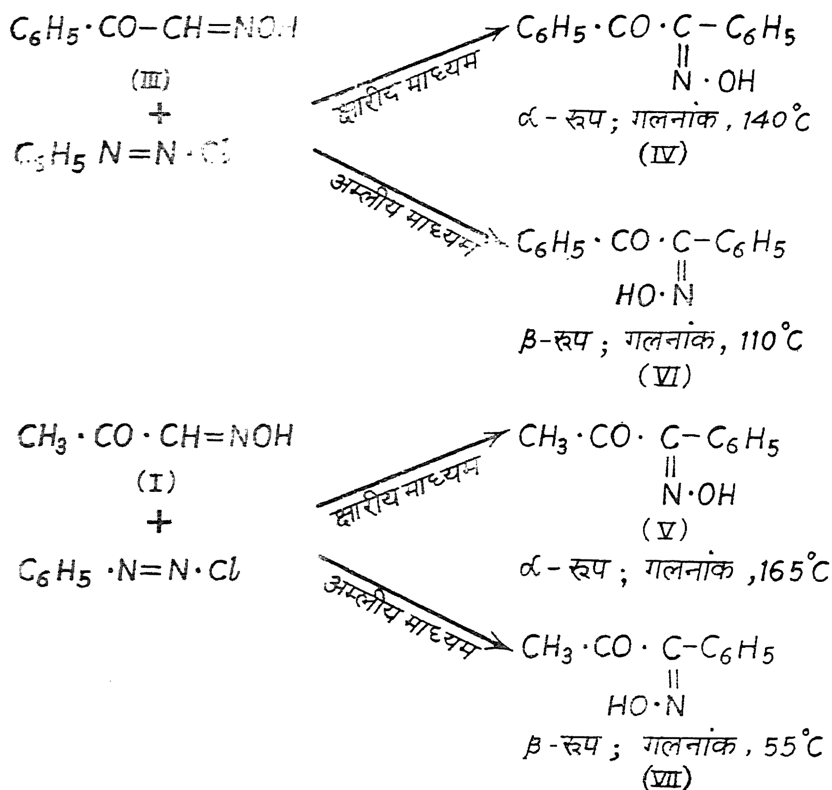
प्रयोगात्मक

आइसोनाइट्रोसो ऐसीटोन (गलनांक, 69°C), डाइआइसोनाइट्रोसो ऐसीटोन (गलनांक, 135°C) तथा आइसोनाइट्रोसो ऐसीटोफिनोन (गलनांक, 123°C) की डाइएजो बेन्जीन क्लोराइड से अभिक्रिया का अध्ययन निम्नलिखिल विधि से किया गया :

आइसोनाइट्रोसो कीटोन को ऐल्कोहॉल की अल्पतम मात्रा में विलीन करके, हिमन-मिश्रण में ठंडा किया गया। इस ठंडे किये गये विलयन में, 0°C पर, बेन्जीन डाइएजोनियम क्लोराइड का लगभग उदासीन (केवल अल्पतम अम्लीय) विलयन मिलाया गया [बेन्जीन डाइएजोनियम क्लोराइड में उपस्थित अतिरिक्त अम्ल (प्रयुक्त करने से पूर्व) सोडियम हाइड्रॉक्साइड के तनु विलयन द्वारा उदासीन कर लिया गया था]। प्राप्त अवक्षेप का पुनर्क्रिस्टलन क्लोरोफार्म से करने के बाद, गलनांक ज्ञात किया गया। उत्पाद में उपस्थित नाइट्रोजन का आकलन ड्यूमा[4] की विधि द्वारा किया गया। प्राप्त परिणाम सारणी-1 में दिये गये हैं।

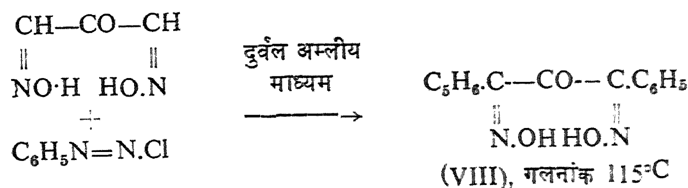
परिणाम तथा विवेचना

बार्शे[2] ने कुछ आइसोनाइट्रोसो कीटोनों की बेन्जीन डाइएजोनियम क्लोराइड के साथ अभिक्रिया का क्षारीय माध्यम में अध्ययन किया। उसी अभिक्रिया का, अम्लीय माध्यम में, अध्ययन प्रस्तुत प्रपत्र में दिया जा रहा है। प्रस्तुत अध्ययन में प्राप्त उत्पाद, फेनिल मूलक युक्त डाइकीटोनों के β-मोनोऑक्सीन पाये गये। इनका अभिविन्यास बार्शे द्वारा प्रदर्शित विन्यास के विपरीत (दूसरी दिशा में) पाया गया। यथा आइसोनाइट्रोसो ऐसीटोफिनोन (III) तथा आइसोनाइट्रोसो ऐसीटोन (I) की बेन्जीन डाइऐज़ोनियम क्लो-

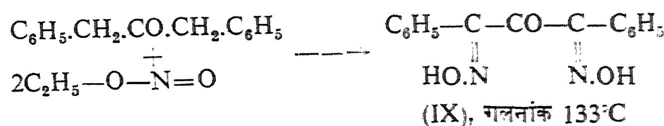


राइड से क्रिया के फलस्वरूप वार्शे ने, क्रमशः बेन्जिल मोनो-ऑक्सीम (IV) एवं ऐसीटिल बेन्ज़ॉयल (V) का निर्माण बताया था। किन्तु प्रस्तुत अध्ययन में प्राप्त उत्पाद, (IV) तथा (V) के β-समावयवी [क्रमशः (VI) तथा (VII)] पाये गये।

बेन्जीन डाइएजोनियम क्लोराइड एवं डाइआइसोनाइट्रोसो ऐसीटोन (II) की दुर्बल अम्लीय माध्यम में अभिक्रिया के फलस्वरूप, प्रस्तुत अध्ययन में, डाइफेनिल ट्राइकीटोन का डाइऑक्सीम (VIII) प्राप्त हुआ :



यह उत्पाद (VIII), वीलेंड[5] द्वारा, डाइमेथिल कीटोन तथा सोडियम मेथिल के ऐल्कोहॉली विलयन की एथिल नाइट्राइल से क्रिया द्वारा प्राप्त डाइऑक्सीम (IX) का समावयवी प्रतीत होता है :



सारणी–1

आइसो नाइट्रोसो कीटोन	गलनांक °C	बेन्जीन डाइएजोनियम क्लोराइड की क्रिया से प्राप्त ऑक्सीम	गलनांक °C	N प्रतिशत प्राप्त	N प्रतिशत सैद्धांतिक
(I) आइसोनाइट्रोसो ऐसीटोन [$CH_3.CO.CH{=}NOH$]	69	मेथिल फेनिल डाइ कीटोन से प्राप्त मोनोऑक्सीम $CH_3.CO.C({=}NOH).C_6H_5$	55	4·5	5·3
(II) डाइआइसोनाइट्रोसो ऐसीटोन [$HO.N{=}CH.CO.CH{=}NOH$]	135	डाइफेनिल ट्राइकीटोन का डाइऑक्सीम $(C_6H_5.C({=}NOH)_2.)CO$	115	8·2	10·4
(III) आइसोनाइट्रोसो ऐसीटोफीनोन [$C_6H_5.CO.CH{=}NOH$]	123	β-बेन्जिल मोनो ऑक्सीम $C_6H_5.CO.C({=}NOH).C_6H_5$	110	6·8	6·2

निर्देश

1. डिम्रॉथ, ओ०, **बर० डेट० केमि० जर०**, 1907, **40**, 2404; (1908), **41**, 4012
2. वार्शे, डब्लू०, वही, 1807, **40**, 739
3. कानूनगो, के०, रत्नाकर, एम० डी० तथा चक्रवर्ती, पी० बी०, **सांइस एण्ड कल्चर** (प्रकाशनाधीन)
4. ड्यूमा, जे० बी० ए० देखें वोगल, ए० आई०, **क्वान्टीटेटिव ऑर्गेनिक ऐनालिसिस**, भाग–3, लांगमेन, लंदन, 1958, पृ० 647
5. वीलेंड, एच०, **बर० डेट० केमि० जर०**, 1904, **37**, 1145

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 4, October, 1980, Pages 299-304

हाइड्रोजन तथा निऑन में जोशी प्रभाव : उच्च ताप पर विराम का प्रभाव

जगदीश प्रसाद
रसायन विभाग, मेरठ कालेज, मेरठ

[प्राप्त—अगस्त 14, 1978]

सारांश

ओज़ोनित्र उत्तेजन के दौरान हाइड्रोजन G_4 (H_2); द्रव पारे के सम्पर्क में हाइड्रोजन $G_2(H_2)$ तथा निऑन $G_5(Ne)$ में जोशी प्रभाव पर 60° तथा 35°C ताप पर विराम-काल के प्रभाव का अध्ययन किया गया। $G_2(H_2)$ में 60° पर देहली विभव Vm में लगभग 4% की वृद्धि तथा 35° पर समान कमी हुई। तीनों निकायों में वर्धित ताप पर विसर्जन धारा बढ़कर घटी और अन्त में अपरिवर्ती हो गई। $G_4(H_2)$ तथा $G_5(Ne)$ में ताप कम होने पर नली धारा, i प्रारम्भ में घटी, तत्पश्चात् बढ़कर स्थिर हो गई। $G_2(H_2)$ में i का परिवर्तन अनियमित था। उच्च ताप पर $G_5(Ne)$ में ऋणात्मक जोशी प्रभाव $-\%\triangle$ पहले घटा और फिर बढ़कर स्थिर हो गया, जबकि निम्न ताप पर यह बढ़कर स्थिर हो गया। धनात्मक जोशी प्रभाव $+\%\triangle i$ (केवल निऑन में प्रेक्षित) उच्च ताप पर प्रारम्भ में बढ़कर अंततोगत्वा स्थिर हो गया, जबकि निम्न ताप पर यह पहले घटा और अन्त में अपरिवर्तित रहा।

उच्च ताप पर कार्य फलन में कमी होना तथा जोशी प्रभाव $\pm\triangle i$ के लिए जोशी के सिद्धान्त में अभिग्रहित अधिशोषित-सदृश सीमांत-तल से गैसों के विशोषण के आधार पर प्राप्त परिणामों की व्याख्या की गई है।

Abstract

Joshi effect in hydrogen and neon : Influence of rest at a higher temperature. Jagdish Prashad, Chemistry Department, Meerut College, Meerut.

Influence of rest peeiod at 60° and 35°C on the Joshi effect in hydrogen G_4 (H_2), hydrogen in contact with liquid mercury G_2 (H_2) and neon G_5 (Ne) was investigated under Ozonizer excitation. About 4% increase in the threshold potential Vm at 60° and an equal decrease at 35° occurred in the case of G_2 (H_2). At the elevated

temperature, the dischaıge current was found first to increase followed by a decrease and become steady afterwards in all the three systems. At the decreased temperature, an initial diminution in G_4 (H_2) and G_5 (Ne) followed by a rise to a constant value occurred in the tube current i. Variation of i in G_2 (H_2) was irregular. At the higher temperature, negative Joshi effect—$\%\triangle$i in G_5 (Ne) first diminished then increased to a constant value i while at the lower temperature, it increased to remain constant. Positive Joshi effect $+\%\triangle i$ (observed only in neon) increased initially at the higher temperature and subsequently remained constant, whereas at the lower temperature decrease was observed initially and later on it remained unaltered.

The results are explained on the basis of the lowering of the work function at the higher temperature and desorption of the gases fom the adsorption-like boundary-layer postulated in Joshi's theory for the effect $\pm\triangle i$.

लेखक के पूर्वप्रकाशित परिणामों [1] से प्रयोगशालीय ताप पर जोशी प्रभाव पर विराम-काल के महत्व का संकेत मिला। अतः यह विचार उत्पन्न हुआ कि उच्च ताप पर विराम से जोशी प्रभाव $\pm\triangle$ प्रभावित हो सकता है। फलतः प्रस्तुत प्रयोगों का ओज़ोनित्र उत्तेजन के दौरान निऑन तथा हाइड्रोजन में (स्थिर परिणाम की दशाओं में) और हाइड्रोजन को द्रव पारे के सम्पर्क में लेकर (परिवर्ती परिमाण की दशा में) अध्ययन किया गया।

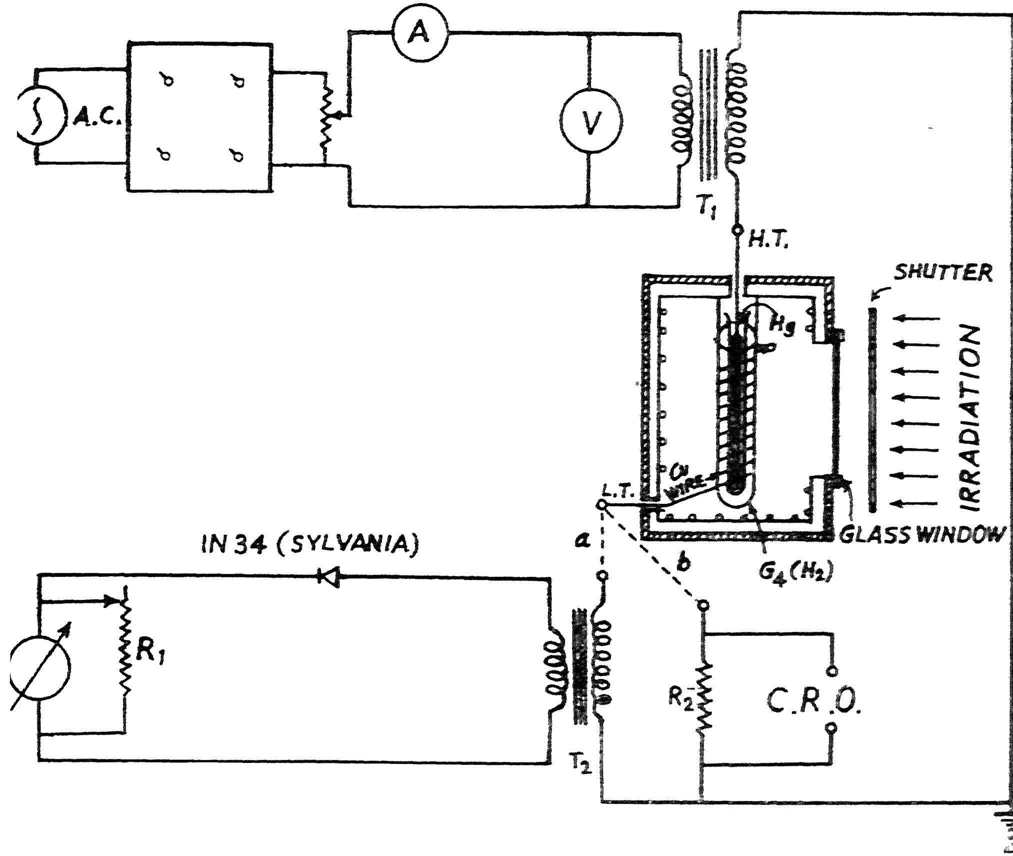
प्रयोगात्मक

द्रव पारे के सम्पर्क में हाइड्रोजन (PH_2= 59 मिमी, 35°C), KOH, $CaCl_2$ तथा P_2O_5 पर प्रवाहन द्वारा शोधित हाइड्रोजन (PH_2 = 120 मिमी 35°C) और निऑन (PNe=6·56 मिमी 35°C) गैसयुक्त सीमेन्स प्रकार के ओज़ोनित्रों का प्रयोग किया गया। विसर्जन नलियों को निश्चित ताप (60° या 35°C) पर अभीष्ट काल तक रखने के लिए उन्हें विद्युत् द्वारा तप्त किये गये ऐस्बेस्टॉस आवरणयुक्त ऐसे कक्षों में लटकाया जिनमें नली के प्रकीर्णन के लिए कांच की एक खिड़की लगी थी (चित्र 1)। ओजोनित्र में परिबद्ध गैस को उत्तेजित करके विसर्जन-धारा को गैल्वनोमीटर के विक्षेपों के रूप में मापा गया।

ओज़ोनित्र से 25 सेमी दूरी पर स्थित सर्पी शटरयुक्त लकड़ी के बॉक्स में बन्द 200 वाट तथा 220 वोल्ट के तप्त तंतु वाले काँच के विद्युत् लैम्प को प्रकीर्णन स्रोत के रूप में प्रयोग किया गया। विसर्जन धारा को प्रकीर्णन स्रोत पर परदा लगाकर (i_D) तथा हटाकर (i_L) मापा गया। $i_L - i_D$ नेट जोशी प्रभाव ($\triangle i$) तथा $100\triangle i/i_D$ आपेक्षिक जोशी प्रभाव ($\%\triangle i$) है।

परिणाम तथा विवेचना

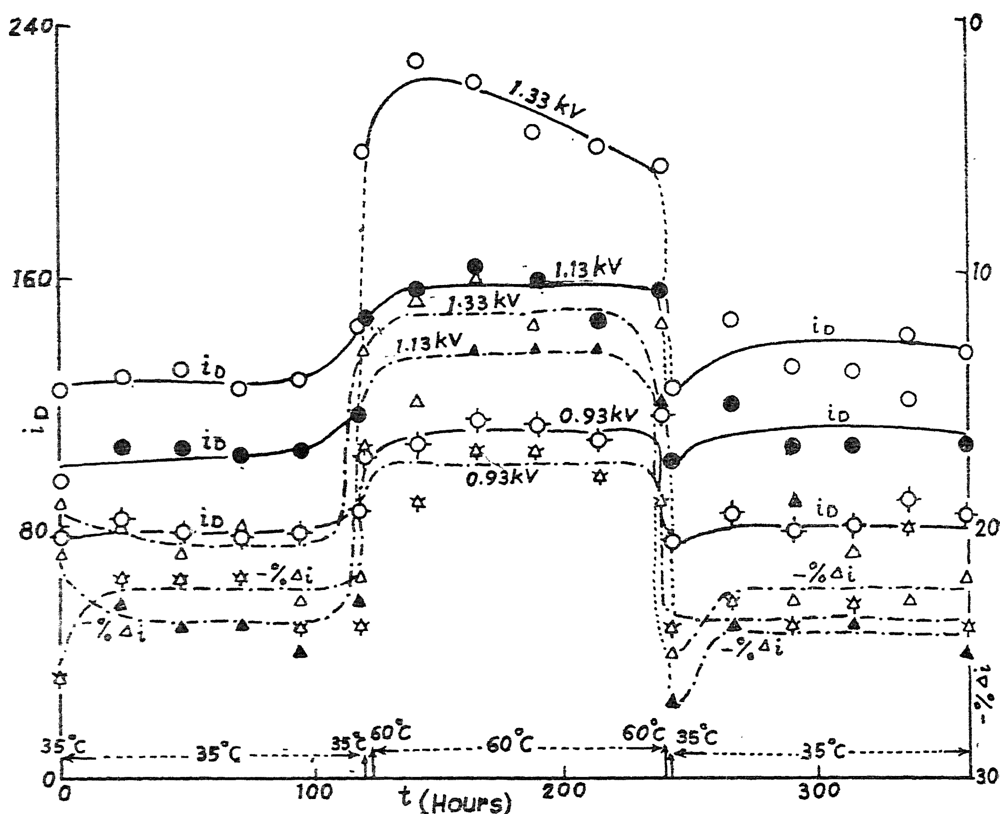
ताप बढ़ने से कैथोड का कार्य फलन [2] घट जाता है—सम्भवतः अधिशोषित ऋण विद्युती [3], [4], [5] परतों के विलोपन द्वारा। इस प्रकार r तथा $\eta\theta g$ प्रक्रमों को सहायता मिलने से वे अनुप्रयुक्त कम क्षेत्रों पर ही सक्रिय हो जाते हैं। तथापि प्रस्तुत अध्ययन के दोनों G_5 (Ne) तथा G_4 (H_2) में से किसी भी निकाय में Vm में कोई परिवर्तन नहीं पाया गया है। ऐसा प्रतीत



चित्र 1 हाइड्रोजन में उच्चताप पर विराम का प्रभाव

होता है कि ताप की कम वृद्धि (35° से 60°) Vm में वृद्धि [6], [7], [8] के लिए अपर्याप्त है—काँच में फर्मी इलेक्ट्रॉनों की अनुपलब्धता के कारण। G_2 (H_2) में ताप के साथ Vm में प्रेक्षित वृद्धि सम्भवतः Vm पर दाब के अनुकूल प्रभाव [1] के कारण है। ताप बढ़ने से विसर्जन धारा में हुई वृद्धि का एक कारण आयन गुच्छों [9] के ऊष्मीय भंग के परिणामस्वरूप उत्पन्न आयनों की अधिक गतिशीलता हो सकता है। इस प्रकार के गुच्छों के निर्माण की सम्भावना हासे के सैद्धान्तिक आधारों [10] से स्पष्ट होती है। यदि λ का मान 0.8165 से कम है [10] तो गुच्छन-गुणांक का मान 1 से अधिक होता है जैसा कि निऑन और हाइड्रोजन के लिए है, अतः गुच्छ बनते हैं। जोशी प्रभाव का प्रस्तुत अध्ययन सीमेन्स प्रकार की हाइड्रोजन तथा निऑन (G_4 तथा G_5) की मुँहबन्द नलियों में (स्थिर परिमाण की दशाओं में) किया गया है। धारा में वृद्धि, यथा निऑन में 1.25 KV पर i की 210 से 400 होने की वृद्धि (चित्र 3) पूर्णतः गतिशीलता-गुणांक [11], [12] के कारण नहीं हो सकती है।

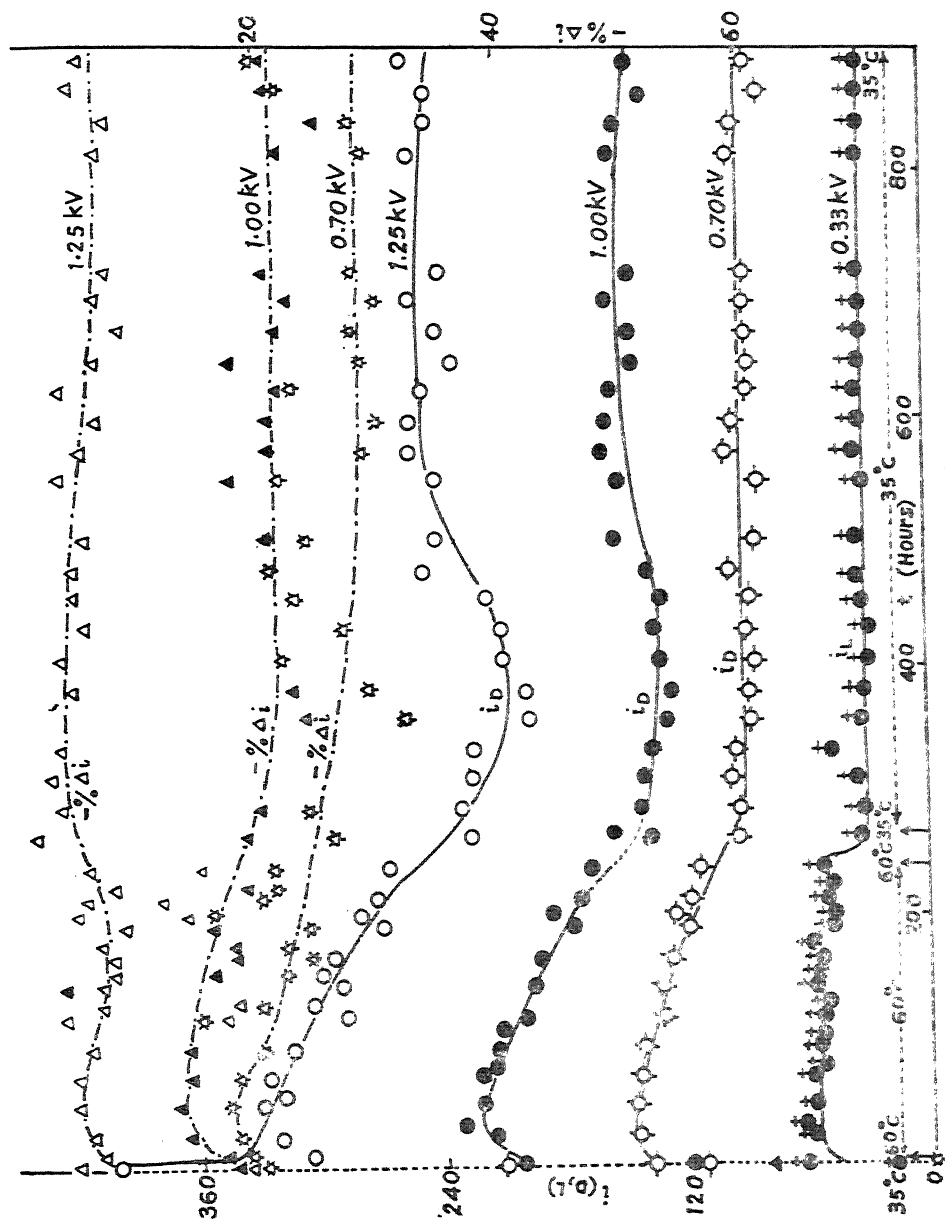
ताप की वृद्धि के कारण काँच की परावैद्युत चालकता में होने वाली वृद्धि [13] के कारण भी विसर्जन धारा में वृद्धि हो सकती है। ताप कम करने पर विसर्जन धारा में होने वाला ह्रास, ताप वृद्धि के प्रभाव के



चित्र 2 हाइड्रोजन में i तथा % Di पर विराम का प्रभाव

उत्क्रम प्रक्रम को प्रदर्शित करता है। तथापि, कालप्रभावन-पूर्व अवस्था की पुनः प्राप्ति पूर्णतः नहीं हुई। ओज़ोनित्र $G_4(H_2)$ तथा $G_5(Ne)$ अपने निर्माण तथा तत्पश्चात् के विभिन्न अध्ययनों के निमित्त प्रयोगों के बाद प्रयोगशालीय ताप पर कई मास तक विराम अवस्था में रहे थे। 35°C पर (तापन के पूर्व) उपलब्ध प्रेक्षण, प्रयोगशालीय ताप पर एक दीर्घ विराम काल के बाद प्राप्त किये गये थे जबकि 35°C पर (60°C पर तप्त करने के बाद) उपलब्ध अन्य आँकड़ों का 60°C पर विराम काल के पश्चात् अभिलेखन किया गया था। अतः तापन के पूर्व के 35°C पर विसर्जन धारा की तुलना में तप्त करने के बाद की 35°C पर धारा में वृद्धि का प्रेक्षण हुआ (चित्र 2 तथा 3)। G_2 (H_2) में प्रेक्षित चालकता की असंगत वृद्धि पारद-वाष्प के द्रवण के कारण हो सकती है क्योंकि इससे ओज़ोनित्र की वलयाकार दीवारों पर स्थानीय बिन्दुओं का निर्माण होता है। इन बिन्दुओं पर इस अभिवर्द्धित सान्द्रण का परिणाम चालकता की वृद्धि में होता है।

प्राथमिक अवस्थाओं में तापन से सीमांत-तल को निर्माण करने वाले आयन तथा अन्य कणों का विशोषण तथा विघ्रुवण होता है। ताप के कारण $-\%\Delta i$ में प्रेक्षित कमी प्रत्याशा के अनुकूल है। ताप



चित्र 3 निआन में *i* तथा % D*i* पर विराम का प्रभाव

कम करने पर $-\%\triangle i$ में हुई वृद्धि इसका संपोषण करती है। उच्च ताथ पर ऋण आयनों की निर्मिति की सम्भावना के संदमन का परिणाम $-\%\triangle i$ के ह्रास में होता है। [3]

ताप की वृद्धि धारा की वृद्धि का कारण बनती है।[15] ताप की वृद्धि कर $+\triangle i$ पर होने वाला प्रेक्षित अनुकूल प्रभाव जोशी के सिद्धान्त का अनुमोदन करता है (चित्र 3)। ताप की वृद्धि सीमांत-तल के कार्य फलन को घटा देती है जिससे अप्रग्रहित प्रकाश- इलेक्ट्रॉनों की संख्या बढ़ जाती है।[16] उच्च ताप पर इस अप्रग्रहित प्रकाश-इलेक्ट्रॉनों की संख्या की वृद्धि से $+\triangle i$ में वृद्धि स्वाभाविक है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

काशी हिन्दू विश्वविद्यालय के सेवानिवृत्त प्रोफेसर तथा रसायन विभाग के अध्यक्ष डा० एस० एस० जोशी के मार्गदर्शन तथा अमूल्य सुझावों के लिए लेखक हृदय से आभारी है।

निर्देश

1. प्रसाद, जे०, **ऐक्टा सिएन्सिया इण्डिका**, 1974, **1**, 13
2. सुह्लमान, आर० तथा डीपोंटे, आर०, **जीट्स एफ फिजिक**, 1933, **86-9-10**, 615
3. ह्यूजिज्, ए० एच० तथा ड्यूब्रिज, एल० ए०, Photoelectric Phenomena, 1932, **मैकग्रॉ हिल बुककम्पनी, न्यूयार्क**
4. लेपेशिस्काया, वी० एन० तथा वेलोगुरोव, वी० एन०, **फिंज् वडोंगो टेला**, 1959, **1.12**, 1806
5. कोस्मा,जी० : **रिव्यू डि फिजिक (बुखारेस्ट)**,1959, **4-3**, 337
6. राव, पी० एस०, **पी-एच० डी० थीसिस** 1956, **काशी हिन्दू विश्वविद्यालय**
7. हैरीज्, डब्लू० एल०, **फिल०ट्रॉंस०**, 1934, **124**, 230
8. थॉम्सन, जे० जे०, "Conduction of Electricity through Gases" भाग **2**, 1933, **कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस**
9. मोहन्ती, एस० आर० , **जर्न इंडियन केमि० सोसा०**, 1948, **25**, 557
10. ह्रासे, एच० आर० , **फिला मेग०**, 1926, vii, **1**, 139
11. टिंडल, ए० एम० तथा पीयर्स, ए० एफ०, **प्रोसी० रॉयल सोसा० (लन्दन)** 1935, A1 **49**, 426
12. पीयर्स, ए० एफ०, **प्रोसी० रॉयल सोसा० (लन्दन)**, 1936, A**155**, 490
13. विल्सन, एच० ए०, "Semi-Conductors and Metals" 1939, **कैम्ब्रिज यूनिवर्सिटी प्रेस**
14. जीलेनी, जे०, **फिजि० रिव्यू**, 1901, **12.6**, 321
15. बौलौड, ए०, **सी० आर० अकेड साइं० (पेरस)**, 1959, **249-14**, 1202
19. देशमुख, जी० एस०, **प्रोसी० इण्डियन एके० साइं०**, 1949, **29**, 243

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23 No. 4, October, 1980, Pages 305-307

एन्टीगोनन लैप्टोपस पौधे के पुष्पों के एन्थोसायनिनों का अध्ययन

के० पी० तिवारी तथा पी० के० मिनोचा
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त–जनवरी 28, 1980]

सारांश

एन्टीगोनन लैप्टोपस पौधे के ताजे पुष्पों के अम्लीय मेथेनॉल (1% HCl) निष्कर्ष से दो एन्थोसायनिन — पिलारगोनिन तथा माल्विन–प्राप्त हुए।

Abstract

Study of anthocyanins from flowers of Antigonon leptopus. *By* K.P. Tiwari and P. K. Minocha, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

The acidic methanol (1% HCl) extract of fresh flowers of Antigonon leptopus yielded two anthocyanins—pelargonin and malvin.

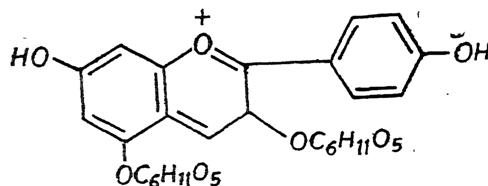
पौधा एन्टीगोनन लैप्टोपस (प्राकृतिक गण—पॉलीगोनेसी) एक आरोही बेल है। इसके सुन्दर गुलाबी पुष्पों के कारण इसे दीवारों एवं उद्यानों में लगाया जाता है। एन्टीगोनन की किसी प्रजाति का रासायनिक प्रीक्षण अभी तक नहीं किया गया है इसलिए एन्टीगोनन लैप्टोपस का रासायनिक परीक्षण किया गया। प्रस्तुत शोध लेख में इसके ताजे पुष्पों से प्राप्त एन्थोसायनिन यौगिकों के अध्ययन का वर्णन किया गया है।

एन्टीगोनन लैप्टोपस के ताजे पुष्पों को 1% मेथेनॉलीय हाइड्रोक्लोरिक अम्ल के साथ निष्कर्षित किया गया। इस निष्कर्ष ने एन्थोसायनिन के सभी अभिलक्षणिक परीक्षण दिये [1]। इस निष्कर्ष को अल्प दाब पर सान्द्रित करने के पश्चात् सिलिका जेल की वर्णपट्टिका पर वर्णलेखित किये जाने पर दो एन्थोसायनिन के चिन्ह पाये गये। इन दोनों एन्थोसायनिनों अ तथा ब को ऐसीटोन तथा ईथर के अलग-अलग अनुपातीय मिश्रणों से प्रभाजी क्रिस्टलन द्वारा पृथक किया गया।

एन्थोसायनिन अ (पिलारगोनिन) का अभिलक्षणन :— एन्थोसायनिन अ को 1% मेथेनालीय हाइड्रोक्लोरिक अम्ल से क्रिस्टलीकृत किया गया। इसके तात्विक विश्लेषण (C 54.39, H 4.91 Cl 5.64%) एवं अणुभार ज्ञापन से अणुसूत्र $C_{27}H_{31}O_{15}Cl$ ज्ञात हुआ। यौगिक अ को 20% हाइड्रोक्लोरिक अम्ल से जलअपघटित करने तथा आइसोएमिल ऐल्कोहल से निष्कर्षित करने के पश्चात् एक एग्लाइकॉन, $C_{15}H_{11}O_5Cl$, द्रवणांक 348-50° प्राप्त हुआ। एग्लाइकॉन के पराबैगंनी वर्णक्रम के अध्ययन[2] (अत्यधिक अवशोषण : मेथेनॉलीय हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में 520nm तथा एथनॉलीय हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में 530nm), सोडियम हाइड्राक्साइड विघटन तथा पिलारगोनिडिन के प्रामाणिक प्रतिदर्श के साथ किये गये सह-वर्णलखन एवं मिश्रित द्रवणांक से यह निष्कर्ष निकला कि एग्लाइकॉन पिलारगोनिडिन है।

एग्लाइकॉन के निष्कर्षण के पश्चात् बचे हुए अम्लीय विलयन को सिल्वर कार्बोनेट से उदासीन करने तथा निक्षेप को छानकर अलग करने के पश्चात् छनित्र में शर्करा परीक्षण हेतु प्रतिदर्शों के साथ किए गये सह-पत्र वर्णलेखन से ग्लूकोस की उपस्थिति ज्ञात हुई।

यौगिक अ के परिमाणात्मक जलविघटन [3] से यह ज्ञात हुआ कि इसमें एग्लाइकॉन तथा ग्लूकोस का अनुपात 1:2 है जिसकी पुष्टि परआयोडेट आक्सीकरण [4] से भी की गयी। एन्थोसायनिन अ पूर्ण मेथिलीकृत व्युत्पन्न को 20% हाइड्रोक्लोरिक अम्ल से अपघटित करने पर 3,5 डाई हाइड्रॉक्सी-4'7 डाई-0-मेथिल फ्लेवेलियम क्लोराइड प्राप्त हुआ जिससे यह ज्ञात हुआ कि एन्थोसायनिन अ में एक ग्लूकोस घटक कार्बन संख्या 3 तथा दूसरा ग्लूकोस घटक कार्बन संख्या 5 पर उपस्थिति-मूलकों के साथ ग्लाइकोसिडिक बन्ध बनाता है। एन्थोसायनिन अ के उपर्युक्त अध्ययन से यह ज्ञात हुआ कि यह पिलारगोनिडिन-3,5 डाई ग्लूकोसाइड (या पिलारगोनिन)) है। इसकी पुष्टि पराबैगंनी वर्णक्रम के अध्ययन[2,5] (अत्यधिक अवशोषण : मेथेनालीय हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में 504nm तथा एथनॉलिक हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में 511nm) तथा पिलारगोनिन के प्रामाणिक प्रतिदर्श के साथ सहपत्रवर्ण लेखन और मिश्रित द्रवणांक से भी की गई। पिलारगोनिन का संरचना सूत्र निम्नवत है।

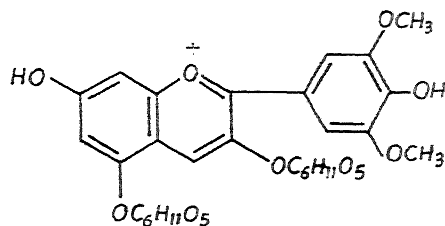


एन्थोसायनिन ब (माल्विन) का अभिलक्षणन —एन्थोसायनिन ब को 1% मेथेनॉलीय हाइड्रोक्लोरिक अम्ल से क्रिस्टलीकृत किया गया। इसके तात्विक विश्लेषण (C 50.39, H 5.07, Cl 5.14%) एवं अणुभार ज्ञापन से अणुसूत्र $C_{29}H_{35}O_{17}Cl$ ज्ञात हुआ। एन्थोसायनिन ब को 20% हाइड्रोक्लोरिक अम्ल से जल-अपघटित करके आइसोएमिल ऐल्कोहल द्वारा निष्कर्षित किया। आइसोएमिल ऐल्कोहल निष्कर्ष से एक एग्लाइकॉन $C_{17}H_{15}O_7Cl$ द्रवणांक 300° प्राप्त हुआ। एग्लाइकॉन के पराबैगनी वर्णक्रम अध्ययन (अत्यधिक अवशोषण : मेथेनॉलीय हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में 542 nm तथा एथेनॉलीय हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में 553 nm),[6] सोडियम हाइड्राक्साइड विघटन से प्राप्त यौगिकों द्वारा एवं माल्विडिन के प्रामाणिक

प्रतिदर्श के साथ किये गये सहपत्रवर्णलेखन तथा मिश्रिण द्रवणांक से यह निष्कर्ष निकलता है कि एग्लाइकॉन माल्विडिन है।

एग्लाइकॉन के निष्कर्षण के पश्चात् बचे हुए अम्लीय विलयन को सिल्वर कार्बोनेट से उदासीन किया गया। इससे प्राप्त निक्षेप को छानकर अलग करने के पश्चात् छनित्र को अल्प दाब पर सान्द्रित किया गया। इस सान्द्रित छनित्र में वर्णपत्र लेखन द्वारा ग्लूकोस की उपस्थिति ज्ञात हुई। इसकी पुष्टि ग्लूकोस के प्रामाणिक प्रतिदर्श के साथ किये गये सहपत्रवर्ण लेखन से की गयी।

एन्थोसायनिन ब पर आयोडिक अम्ल ऑक्सीकरण[4] एवं परिमाणात्मक जल अपघटन[3] से यह ज्ञात हुआ कि इसमें एग्लाइकॉन तथा ग्लूकोस का अनुपात 1:2 है। एन्थोसायनिन ब के पूर्ण मेथलीकृत व्युत्पन्न को 20% हाइड्रोक्लोरिक अम्ल से जलअपघटित करने पर 3,5 डाई हाइड्रॉक्सी 3′,4′.5′,7 टेट्रा–O–मेथिल फल्वेलियम क्लोराइड प्राप्त हुआ जिससे यह ज्ञात हुआ कि एन्थोसायनिन ब में एक ग्लूकोस घटक कार्बन संख्या 3 तथा दूसरा कार्बन संख्या 5 पर उपस्थित –OH मूलकों के साथ ग्लाइकोसिडिक बन्ध बनाता है। एन्थोसायनिन ब के उपर्युक्त अध्ययन से यह ज्ञात हुआ कि यह माल्विडिन 3,5 डाइ ग्लुकोसाइड (या माल्विन) है। इसकी पुष्टि परावैंगनी वर्णक्रम के अध्ययन[6] (अत्यधिक अवशोषण : मेथेनॉलीय हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में 533nm तथा एथेनॉलीय हाइड्रोक्लोरिक अम्ल में 537nm) तथा माल्विन के प्रामाणिक प्रतिदर्श के साथ सहवर्णलेखन एवं मिश्रित द्रवणांक से भी की गयी। माल्विन का संरचना सूत्र निम्नवत है।



माल्विन

निर्देश

1. पीच, के० तथा ट्रेसी, एम०वी०, **माडर्न मेथड्स आफ प्लान्ट एनालिसिस, स्प्रिन्गर व रलाग बर्लिन,** 1955 **3**, 466
2. टन्डन, एस०पी० इत्यादि, **दि नेचरविशनशाफन बर्लिन** 1970. **8**, 394,
3. मिश्रा, एस०वी० तथा मोहनराव, वी०के०. **जर्न० सा० इन्डि० रिसर्च** 1960, **19**, 173;
4. हिर्स्ट, ई०एल० तथा जोन्स, जे०के०एन०, **जर्न० केमि० सोसा०** 1946, 1659
5. तिवारी, के०पी० इत्यादि, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका** 1978, **21** (2), 177
6. तिवारी, के०पी० इत्यादि, **जर्न० इन्डि० केमि० सोसा०** (प्रकाशनाधीन)।

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 4, October, 1980, Pages 309-313

α-हाइड्रॉक्सी अम्लों के साथ Fe (III), Cr (III) तथा Ti (III) संकुलों का उष्मागतिक अध्ययन

पी० बी० चक्रवर्ती तथा एच० एन० शर्मा
रसायन प्रयोगशाला, महारानी लक्ष्मीबाई कन्या महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—अप्रैल 6, 1979]

सारांश

Fe (III), Cr (III) तथा Ti (III) की α-हाइड्रॉक्सी अम्लों के साथ अभिक्रियाओं के उष्मागतिक-स्थिरांक, 30°C तथा 0·1M आयनिक सान्द्रता में, परिकलित किये गये हैं। इस हेतु प्रोटॉन-लीगेंड एवं धातु-लीगेंड निर्माण-स्थिरांक इर्विंग-रोसॉटी के समीकरणों का उपयोग करते हुये, बेरम-केलविन की pH-अनुमापन विधि द्वारा, तीन तापों, 30,° 40° तथा 50°C पर 0.1M ($NaClO_4$) आयनिक-सांद्रता में प्राप्त किये गये। अध्ययन में प्राप्त स्थायित्व के क्रम की व्याख्या, उष्मागतिक स्थिरांकों के प्राप्त मानों एवं "क्रिस्टल-फील्ड स्थायीकरण ऊर्जा" के आधार पर की गई है।

Abstract

Thermodynamic study of Fe (III), Cr (III) and Ti (III) complexes of α-hydroxy acids. *By* P. B. Chakravarti and H. N. Sharma, Chemical Laboratories, M. L.B. Girls College, Bhopal.

Thermodynamic parameters characterising the interactions of Fe (III), Cr (III) and Ti (III) with some α-hydroxy acids have been calculated at 30°C and in 0·1M ($NaClO_4$) ionic strength medium. The proton-ligand and metal-ligand formation constants were obtained at three temperatures (30°, 40° and 50°C) and in 0·1M ($NaClO_4$) ionic strength, using Calvin-Bjerrum pH titration technique as adopted by Irving and Rossotti. The order of stability obtained has been discussed on the basis of these parameters and crystal field stabilisation energy.

α-हाइड्रॉक्सी अम्लों के Fe (III) एवं Ti (III) के साथ यौगिक, अपने औषधीय एवं औद्योगिक उपयोगों के करण काफी महत्वपूर्ण हैं। यद्यपि Fe (III), Cr (III) और Ti (III) के कुछ α-हाइड्रॉक्सी अम्लों के साथ संकुलों के सम्बन्ध में जानकारी साहित्य में उपलब्ध है किन्तु, इन अभिक्रियाओं के परिमाणात्मक अभिलक्षणीकरण के सम्बन्ध में कोई जानकारी उपलब्ध नहीं है। अपने पूर्व शोध-पत्रों में हमने Ti (III) के α-हाइड्रॉक्सी अम्लों के साथ संकुलों के उष्मागतिक स्थिरांकों के मान[1,2] प्रस्तुत किये थे। इस शोध-प्रपत्र में ग्लाइकोलिक, लैक्टिक एवं मैंडलिक अम्लों के साथ Fe (III) एवं (Cr III) की अभिक्रियाओं के उष्मागतिक-स्थिरांक प्रस्तुत किये गये हैं तथा स्थायित्व के क्रम की व्याख्या इन स्थिरांकों के मानों के आधार पर तथा क्रिस्टल फील्ड स्थायीकरण ऊर्जा के प्रकाश में की गयी है। तुलना के लिये, Ti (III) के संगत संकुलों के हमारे द्वारा पूर्व-वर्णित मान[1,2,7] ले लिये गये हैं।

प्रयोगात्मक

प्रयोग में लाये गये सभी रसायन उच्च शुद्धता वाले थे। धातु एवं लीगेंडों के मानक विलयन दो बार आसुत जल में बनाये गये तथा मानक विधियों द्वारा मानकित किये गये।

उपयोग में लाये गये उपकरण तथा प्रायोगिक विधियाँ हमारे पूर्व शोध-पत्र[2] के अनुसार ही थे। Fe(III) तथा Cr (III) के, प्रयुक्त α-हाइड्रॉक्सी अम्लों के साथ बनने वाले, संकुलों के भारशः अनुपात नायर तथा पान्डे की एकपरिवर्तन विधि[3] द्वारा प्राप्त किये गये। विभिन्न पदों के स्थायित्व स्थिरांक, इर्विंग-रोसॉटी[4] द्वारा प्रयोग में लायी गयी बेरम-केलविन[5] की pH-अनुमापन-विधि द्वारा परिकलित किये गये। इस हेतु निम्नलिखित-विलयन, CO_2 मुक्त, 0·2M सांद्रता के KOH विलयन द्वारा अनुमापित किये गये :

(अ) 5 मिली 0·04M $HClO_4$,

(ब) (अ) + 10 मिली 0·02M लीगेंड-विलयन,

(स) (ब) + 5 मिली 0·002M धातु-विलयन।

उपर्युक्त सभी प्रकरणों में कुल आयतन 50 मिली रखते हुए, आयनिक सांद्रता 0·1M रखने के लिये आवश्यक मात्रा में 1M सांद्रता का सोडियम परक्लोरेट विलयन मिलाया गया। प्रत्येक प्रकरण में, मिलाये गये क्षार पर प्राप्त पी-एच मानों को आलेखित करने पर प्राप्त अनुमापन-वक्रों के बीच के क्षैतिज अन्तरों के मानों से, $\bar{n}_A$, $\bar{n}$ तथा pA के मान इर्विंग-रोसॉटी द्वारा दिए गये समीकरणों[4] से परिकलित किये गये। प्रोटॉन-लीगेंड तथा धातु-लीगेंड के निर्माण-स्थिरांक तीन तापों, 30°, 40° तथा 50°C, पर अर्ध-$\bar{n}$ निर्धारण विधि द्वारा निर्माण-वक्रों से सीधे प्राप्त किये गये। संशोधित-मान निम्नतम-वर्ग विधि से परिकलित किये गये हैं तथा सारणी 1 में दिये गये हैं।

प्रथम पद एवं सम्पूर्ण अभिक्रियाओं के लिये मुक्त ऊर्जा, $\triangle G$; एन्थाल्पी, $\triangle H$ तथा एन्ट्रॉपी परिवर्तनों के मान 30°C तथा 0·1M ($NaClO_4$) आयनिक-सांद्रता के माध्यम में क्रमशः वान्ट हॉफ अइसोथर्म, वान्ट हॉफ आइसोबार के ग्रफीय हल तथा गिब्ज-हेल्मोल्त्ज समीकरणों से परिकलित किये गये एवं सारणी 2 में दिये गये हैं।

परिणाम तथा विवेचना

नायर एवं पान्डे[3] की एकपरिवर्तन-विधि एवं *n* के अधिकतम मान (≈ 3), Fe (III) तथा Cr (III) के ग्लायकोलिक, लैक्टिक एवं मैंडलिक अम्लों के साथ (M : L) 1 : 1, 1 : 2 तथा 1 : 3 संकुलों के निर्माण दर्शाते हैं ।

पी-एच अनुमापन वक्रों में अंतर स्पष्टतः बताता है कि लीगेंड अणु के धातु आयन से कीलेटित होते समय, प्रत्येक पद में एक प्रोटॉन मुक्त होता है, अतः Fe (III) और Cr (III) के प्रकरणों में भी अभिक्रियायें, Ti (III) के अनुरूप ही, निम्नरूप में होती हैं :



$$M^{3+} + HL \rightleftharpoons [ML]^{++} + H^{+} \quad (1)$$



$$[ML]^{++} + HL \rightleftharpoons [ML_2]^{+} + H^{+} \quad (2)$$



$$[ML_2]^{+} + HL \rightleftharpoons [ML_3] + H^{+} \quad (3)$$

जहाँ M^{3+}, Fe (III) तथा Cr (III) को एवं HL, $H^{+}(CH_2.OH.COO)^{-}$, $H^{+}(CH_3.CH.OH.COO)^{-}$ अथवा $H^{+}(C_6H_5.CH.OH.COO)^{-}$ को निरूपित करते हैं ।

पी-एच-अनुमापनों में, Fe (III)-ग्लायकोलेट, लैक्टेट तथा मैंडलेट निकायों में 4·8 पी-एच मान के लगभग अवक्षेपण प्रारम्भ हो जाता है; इसी प्रकार Cr (III) के संगत निकायों में अवक्षेपण 5·5 पी-एच के लगभग प्रारम्भ होता है । अतः सभी परिकलन इन पी-एच मानों के पहले तक ही किये गये हैं ।

सारणी 1 के अवलोकन से स्पष्ट है कि Fe (III), Cr (III) तथा Ti (III) के इन संकुलों का स्थायित्व, Ti (III)>Fe (III)>Cr (III) क्रम में परिवर्तित होता है । यह क्रम इर्विंग-विलियम्स के आनुभविक-नियमों[6] के प्रकाश में अपेक्षित क्रम के अनुरूप नहीं है । अपेक्षित क्रम F (III)>Cr(III)>Ti(III) है । यद्यपि, Fe (III) और Cr (III) के संकुलों के स्थायित्व का क्रम, अपेक्षित क्रम के अनुरूप ही Fe (III)>Cr (III), प्राप्त होता है; किन्तु प्रस्तुत अध्ययन में Ti (III) के संकुलों का स्थायित्व, Fe (III) और Cr (III) के संगत संकुलों से अधिक पाया गया । Ti (III)-संकुलों का अधिक स्थायित्व, सम्भवतः, इन संकुलों में प्रेक्षित[7] जान-टेलर विरूपण से प्राप्त अतिरिक्त स्थायीकरण ऊर्जा के कारण है ।

लीगेंडों के सन्दर्भ में स्थायित्व, क्षारक-सामर्थ्य के अनुरूप ही, लेक्टेट>ग्लायकोलेट>मैंडलेट, पाया गया । यहाँ यह रेखांकित करना अनुपयुक्त नहीं होगा कि Ti (III) के प्रकरण में यह क्रम ग्लायकोलेट>लेक्टेट>मैंडलेट पाया गया; जो ग्लायकोलिक, लैक्टिक एवं मैंडलिक अम्लों में क्रमशः भारी होते हुए, H, CH_3 तथा C_6H_5 समूहों द्वारा प्रस्तुत त्रिविम-बाधा के कारण बताया गया है ।[2]

सारणी 2 के अवलोकन से स्पष्ट है कि, प्रस्तुत अध्ययन में प्रेक्षित स्थायित्व के क्रम के निर्धारण में एन्थाल्पी-परिवर्तन ऋणात्मक मान महत्वपूर्ण भूमिका निभाते हैं, अध्ययन किये गये आयनों के लिये जिसका क्रम Cr (III)>Ti (III)>Fe (III) पाया गया । यह क्रिस्टल फील्ड सिद्धांत के प्रकाश में अपेक्षाओं के अनुरूप ही है ।

सारणी 1

Fe (III) और Cr (III) के α-हाइड्रॉक्सी अम्लों के साथ संकुलों के
30°, 40° तथा 50°C पर निर्माण स्थिरांक

μ=0·1M ($NaClO_4$) a=अर्ध $\bar{n}$ की विधि
b=निम्नतम-वर्ग विधि

	ताप एवं विधि	Fe (III)				Cr (III)			
		log K_1	log K_2	log K_3	log β_3	log K_1	log K_2	log K_3	log β_3
ग्लायकॉलिक अम्ल	30° (a)	3·48	3·20	2·94	9·62	3·64	2·77	2·32	8·73
	(b)	3·52	3·20	2·86	9·58	3·72	2·65	2·30	8·67
	40° (a)	3·42	3·15	2·90	9·47	3·60	2·66	2·30	8·56
	(b)	3·38	3·10	2·86	9·34	3·55	2·50	2·27	8·32
	50° (a)	3·30	3·07	2·89	9·27	3·58	3·26	2·25	9·09
	(b)	3·30	3·00	2·90	9·20	3·55	3·20	2·20	8·95
लैक्टिक अम्ल	30° (a)	3·77	3·42	2·97	10·16	3·75	3·10	2·30	9·15
	(b)	3·80	3·36	2·90	10·06	3·80	3·15	2·25	9·20
	40°(a)	3·70	3·38	2·96	10·04	3·65	3·00	2·16	8·81
	(b)	3·64	3·35	2·95	9·94	3·63	3·29	2·15	9·07
	50° (a)	3·67	3·28	2·91	9·86	3·54	2·95	2·00	8·49
	(b)	3·65	3·26	2·95	9·86	3·60	2·93	2·05	8·58
मैंडलिक अम्ल	30° (a)	3·22	3·13	2·70	9·05	3·23	2·96	2·49	8·68
	(b)	3·26	3·15	2·60	9·01	3·20	2·95	2·40	8·55
	40° (a)	3·18	3·09	2·65	8·92	3·20	2·94	2·35	8·49
	(b)	3·20	3·10	2·60	8·90	3·25	2·98	2·35	8·6
	50° (a)	3·16	3·07	2·59	8·82	3·17	2·92	2·26	8·35
	(b)	3·12	3·00	2·53	8·65	3·15	2·90	2·30	8·35

सारणी 2

Fe (III), Cr (III) तथा Ti (III) के α-हाइड्रॉक्सी अम्लों के साथ संकुल के उष्मागतिक स्थिरांक

ताप 30°C $\mu = 0{\cdot}1M\ (NaClO_4)$

		Fe (III)			Cr (III)			Ti (III)[2]		
		ग्ला०	लैक्टि०	मैंड०	ग्ला०	लैक्टि०	मैंड०	ग्ला०	लैक्टि०	मैंड०
प्राप्यतम ऊर्जा परिवर्तन	प्रथम-पद $\triangle G_1$	−4·93	−5·24	−4·46	−5.05	−5·20	−4·48	−5·27	−4·96	−4·30
किकै०/ मोल	सम्पूर्ण $\triangle \mathscr{G}_3$	−13·35	−14·10	−12·64	−12·10	−11·70	−12·00	−15·50	−14·26	−12·80
एन्थाल्पी परिवर्तन	प्रथम-पद $\triangle H_1$	−2.30	−2·10	−2·00	−4·60	−4·78	−4·40	−3·68	−3·68	−3·68
/किकै० मोल	सम्पूर्ण, $\triangle \mathscr{H}_3$	−6·37	−6·24	−5·90	−9·86	−10·12	−9·75	−9·46	−9·33	−9·46
एन्ट्रॉपी परिवर्तन	प्रथम-पद, $\triangle S_1$	8·7	10·00	8·00	1·50	1.40	1·20	5·10	4·20	2·00
कै०/डिग्री०/ मोल	सम्पूर्ण, $\triangle \mathscr{L}_3$	23·00	35·90	21·80	7·50	8·50	7·90	19·90	16·30	11·00

निर्देश

1. चक्रवर्ती, पी० बी० तथा शर्मा, एच० एन०, **सांइस एन्ड कल्चर**, 1973, **39**, 344; 1974, **40**, 144, 407
2. चक्रवर्ती, पी० बी० तथा शर्मा, एच० एन०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1975, **18**, 169
3. नायर, एम० तथा पान्डे, सी० एस०, **प्रोसी डि० इन्डियन ऐके० सांइस**, 1942, **27A**, 284
4. इरविंग, एच० एम० तथा रोसॉटी, एच० एस०, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1954, 2904
5. केलविन, एच० तथा विल्सन, के० डब्लू०, **जर्न० अमे० केमि० सोसा०**, 1945, **67**, 2003
6. इर्विंग, एच० तथा विलियम्स, **जर्न० केमि० सोसा०**, 1953, 3192
7. चक्रवर्ती, पी० बी०, **पी-एच० डी० थीसिस**, विक्रम विश्वविद्यालय, उज्जैन, 1973

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 4, October, 1980, Pages 315-318

मेपाक्रीन-क्यूप्रिक क्लोराइड संकुल

एस० एस० गुप्ता, कुमुद गुप्ता तथा आर० कौशल*
रसायन प्रयोगशाला, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—अक्टूबर 4, 1979]

सारांश

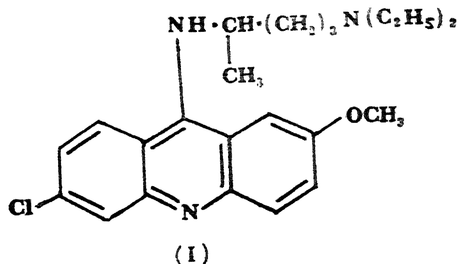
चालकतामूलक अनुमापन तथा विश्लेषण आँकड़ों से ज्ञात हुआ है कि मलेरिया औषधियों में मेपाक्रीन, क्यूप्रिक क्लोराइड के साथ ऐल्कोहल माध्यम में 1 : 2 संकुल बनाता है। संकुल संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम (आई० आर०) से भी की गई है।

Abstract

Mepacrine-cupric chloride complex. *By* S. S. Gupta, Km. Kumud Gupta, and R. Kaushal, Chemical Laboratories, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal.

Mepacrine, an antimalarial, forms 1 : 2 complex with cupric chloride in alcoholic solutions as indicated by conductometric titrations and analytical data. Structure assigned is supported by I.R. spectral bands.

मेपाक्रीन (I), 6-क्लोरो-9 [{4-डाइ एथिल-एमीनो) -1 मेथिल ब्यूटिल} एमीनो] -2- मेथाक्सी, एक्रीडीन, का एक अणु मुख्य रूप से दो भागों में विभाजित किया जा सकता है :—



(I)

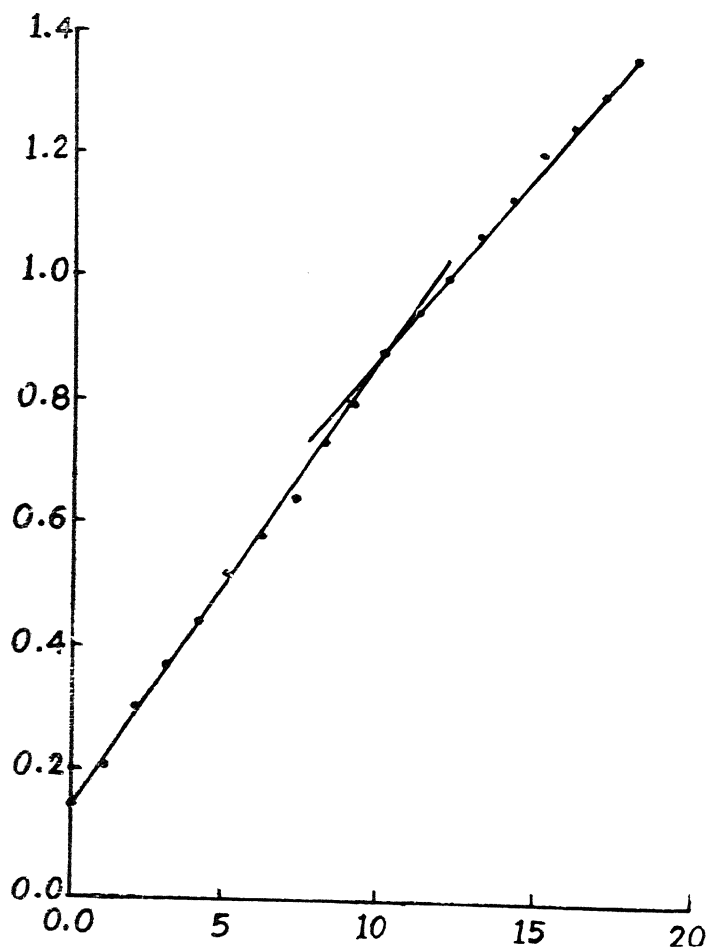
*अवकाश प्राप्त प्राध्यापक, होल्कर विज्ञान महाविद्यालय, इन्दौर

1. बाइ एथिल एमीनो -1- मेथिल ब्यूटिल ऐमीनो पार्श्व श्रृंखला तथा
2. डाइ आर्थो डाइ बेंजों -4- ऐमीनो पिरीडीन ।

धातुओं के साथ संकुल बनाने में उपर्युक्त दोनों भाग या एक भाग काम में आता है, अतः धातुओं के साथ एन्टीमलेरियल के संकुलों के अध्ययन[1-7] को आगे बढ़ाते हुये प्रस्तुत शोध पत्र में मेपाक्रीन-क्यूप्रिक क्लोराइड संकुल वर्णित किया गया है ।

प्रयोगात्मक

संकुल का संयोजन—मेपाक्रीन हाइड्रोक्लोराइड (0·01 M) तथा क्यूप्रिक-क्लोराइड (0·02 M) के मानक विलयन दो बार आसवित शुद्ध चालकता जल में बनाये गये । लीगैन्ड के 10 मि० ली० विलयन



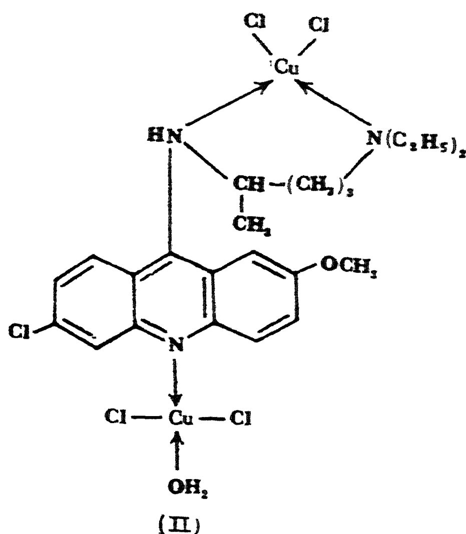
चित्र 1

को 100 मि० ली० तक तनु किया गया तथा उसका अनुमापन धातु विलयन के साथ "तोशनीवाल" चालकतामापी द्वारा 30° से० पर किया गया। आयतन संशोधन के बाद प्राप्त परिणाम 1 : 2 मेपाक्रीन-क्यूप्रिक क्लोराइड संकुल की पुष्टि करते हैं (चित्र 1)।

वियोजन तथा विश्लेषण—मेपाक्रीन बेस (आधिक्य) तथा क्यूप्रिक क्लोराइड (1 ग्राम) को अलग-अलग परिशुद्ध ऐल्कोहल की अल्प मात्रा में घोला गया। लीगैन्ड तथा धातु के विलयन को संतत विलोडन के साथ मिलाया गया एवं बर्फ में रखकर ठंडा किया गया। फलस्वरूप गहरे पीले रंग का संकुल प्राप्त हुआ जिसे छान कर तथा धोकर शुद्ध किया गया। संकुल 150° से० पर पिघलता है। संकुल में C 18·36, H 19·95, O 5·83, तथा Cl 3·32, पाये गये जबकि सिद्धांततः 18·50, 20·65, 6·12 तथा 2·62, होना चाहिये।

विवेचना

उपर्युक्त परिणामों के आधार पर मेपाक्रीन-क्यूप्रिक क्लोराइड संकुल को संरचना (II) के द्वारा निरूपित किया जा सकता है।



(II)

संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम (I. R.) द्वारा भी होती है जिसमें धातु-नाइट्रोजन का अवशोषण बैंड 650cm^{-1} पर प्राप्त होता है। संकुल में एक जल अणु उपसहसंयोजकता द्वारा बंधा है जिसकी पुष्टि 825 एवं 3520 cm^{-1} पर प्राप्त अवशोषण बैंड द्वारा होती है। उपरोक्त संरचना मेपाक्रीन-मरक्यूरिक क्लोराइड संकुल[8] के अनुरूप है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक, शोधकार्य हेतु सुविधाएँ प्रदान करने के लिये मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल के प्राचार्य के आभारी हैं। शोधकार्य में आर्थिक सहायता प्रदान करने हेतु एक लेखक (एस० एस० गुप्ता) विश्वविद्यालय अनुदान आयोग का भी आभारी है।

निर्देश

1. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इंडियन केमि० सोसा०**, 1974, **51**, 649
2. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दिकी, एस०, तथा कौशल, आर०, **जर्न० इंडियन केमि० सोसा०**, 1974, **51**, 769
3. गुप्ता, एस० एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इंडियन केमि० सोसा०**, 1975, **52**, 642
4. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दिकी, एस० तथा कौशल, आर०, **जर्न० इंडियन केमि० सोसा०**, 1976, **53**, 241
5. गुप्ता, एस० एस०, सिद्दिकी, एस० तथा कौशल, आर०, **साइंस एंड कल्चर**, 1977, **43**, 443
6. गुप्ता, एस० एस०, तथा कौशल, आर०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1978, **21** (3), 253
7. गुप्ता, एस० एस० गुप्ता, कुमुद तथा कौशल, आर०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1978, **21** (3), **261**
8. गुप्ता, एस० एस०तथा कौशल, आर०, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1977, **20** (3), 223

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 4, October 1980, Pages 319-322

दो चरों वाले H-फलन हेतु युगल श्रेणी-I

नाम प्रसाद सिंह

गणित विभाग, मोतीलाल विज्ञान महाविद्यालय, भोपाल

[प्राप्त—दिसम्बर 7, 1979]

सारांश

इस शोध पत्र का उद्देश्य दो चरों वाले *H*-फलन हेतु युगल श्रेणी सम्बन्ध स्थापित करना है। प्राप्त परिणाम की प्रकृति अत्यन्त सामान्य है, अतः इस परिणाम से, प्राचलों का विशिष्टीकरण करने पर विभिन्न फलनों हेतु कई पूर्वविदित तथा कुछ नये फल विशिष्ट रूप में प्राप्त होते हैं।

Abstract

Double series for H-function of two variables-I. *By* Namprasad Singh, Department of Mathematics, Motilal Vigyan Mahavidyalaya, Bhopal.

The aim of this paper is to establish a double series relation for the H-function of two variables. The resut is of very general character, hence on specializing the parameters, this relation yields many known as well as some new results as particular cases.

1. प्रस्तावना : दो दो चरों वाले सार्वीकृत फाक्स [2, p.397] के *H*-फलन को मित्तल तथा गुप्ता [4, p.117] ने मेलिन बार्नीज के समाकल के रूप में परिभाषित किया है, जिसको लेखक [5 & 6] द्वारा अन्यत्र निम्न प्रकार से प्रदर्शित किया गया है।

$$H(y, z)=H^{o,n_1:m_2,n_2;m_3,n_3}_{p_1,q_1:p_2,q_2:p_3,q_3}\left[\begin{matrix} y \\ z \end{matrix}\middle| \begin{matrix} ((a_{p1};\alpha_{p1},A_{p1});(c_{p1},\gamma_{p2});((e_{p3},E_{p3})) \\ ((b_{q1};\beta_{q1},B_{q1}));(d_{q2},\delta_{q2}));((f_{q_3},F_{q3})) \end{matrix}\right]$$

$$=(2\pi i)^{-2}\int_{L_1}\int_{L_2}\phi(s,t)\theta_1(s)\theta_2(t)y^s z^t ds dt \tag{1.1}$$

जहाँ

$$\phi(s, t)=\frac{\prod_{j=1}^{n1}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s+A_j t)}{\prod_{j=n_1+1}^{p1}\Gamma(a_j-\alpha_j s-A_j t)\prod_{j=1}^{q1}\Gamma(1-b_j+\beta_j s+B_j t)} \tag{1.2}$$

$$\theta_1(s)=\frac{\prod_{j=1}^{m_2}\Gamma(d_j-\delta_j s)\prod_{j=1}^{n_2}\Gamma(1-c_j+\gamma_j s)}{\prod_{j=m_2+1}^{q_2}\Gamma(1-d_j+\delta_j s)\prod_{j=n_2+1}^{p_2}\Gamma(c_j-\gamma_j s)} \tag{1.3}$$

तथा (1.3) की भाँति $\theta_2(t)$ भी प्राचलों के समुच्चयों $((e_{p_3},E_{p_3}))$, $((f_{q_3},F_{q_3}))$ द्वारा परिभाषित है।

समुच्चय $((a_{p_1};\alpha_{p_1},A_{p_1}))$ द्वारा $(a_1;\alpha_1,A_1),\ldots,(a_{p_1};\alpha_{p_1},A_{p_1})$, $[h,k;(\delta,\mu)]$ द्वारा $(h;\delta,\mu)$, $(k;\delta,\mu)$ तथा

$$H^{o,n_1}_{p_1,q_1}\left[\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\middle|\begin{matrix}((a_{p_1};\alpha_{p_1},A_{p_1}))\\((b_{q_1};\beta_{q_1},B_{q_1}))\end{matrix}\right]$$

द्वारा $H(y,z)$ जो कि (1.1) द्वारा परिभाषित है (यदि केवल $n_1,p_1,q_1;a_i,\alpha_i,A_i b_j,\beta_j,B_j,(i=1,\ldots,p_1;j=1,\ldots,q_1)$ में ही अन्तर हो) का बोध होता है।

समाकल (1.1) निम्नांकित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत अभिसारी है जबकि $|\arg y|<\frac{1}{2}\mu_1\pi$, $|\arg z|<\frac{1}{2}\mu_2\pi$ हो यदि :

$$\mu_1=\sum_1^{n_1}\alpha_j-\sum_{n_1+1}^{p_1}\alpha_j-\sum_1^{q_1}\beta_j+\sum_1^{m_2}\delta_j-\sum_{m_2+1}^{q_2}\delta_j+\sum_1^{n_2}\gamma_j-\sum_{n_2+1}^{p_2}\gamma_j>0 \tag{1.4}$$

$$\mu_2=\sum_1^{n_1}A_j-\sum_{n_1+1}^{p_1}A_j-\sum_1^{q_1}B_j+\sum_1^{m_3}F_j-\sum_{m_3+1}^{q_3}F_j+\sum_1^{n_3}E_j-\sum_{n_3+1}^{p_3}E_j>0 \tag{1.5}$$

2. प्रमुख युगल श्रेणी

$$\sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-m)_h(-n)_k}{h!\,k!}$$
$$\times H^{o,n_1+3}_{p_1+3,q_1+3}\left[\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(1-c-h;\alpha,\lambda),(1-d-k;\beta,\mu),(1-b-h-k;\delta,\nu),((a_{p_1};\alpha_{p_1},A_{p_1}))\\((b_{q_1};\beta_{q_1},B_{q_1})),(1-c-d-h-k;\alpha+\beta,\lambda+\mu),1-b-m,1-b-n;(\delta,\nu)]\end{matrix}\right]$$

$$=H^{o,n_1+3}_{p_1+3,q_1+3}\left[\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(1-c-n;\alpha,\lambda),(1-d-m;\beta,\mu),(1-b-m-n;\delta,\nu),((ap_1;\alpha p_1,Ap_1))\\((b_{q_1};\beta_{q_1},B_{q_1})),(1-c-d-m-n;\alpha+\beta,\lambda+\mu),[1-b-m,1-b-n;(\delta,\nu)]\end{matrix}\right] \tag{2.1}$$

यदि $|\arg y|<\frac{1}{2}\mu_1\pi-\delta$, $|\arg z|<\frac{1}{2}\mu_2-\nu$.

उपपत्ति : युगल श्रेणी सम्बन्ध (2.1) के सत्यापन के लिये उसमें बाम पक्ष में आये हुये दो चरों वाले H-फलन को (1.1) की भाँति मेलिन-बार्नीज कंटूर समाकल के दो पदों में व्यक्त करने तथा समाकलन एवं संकलन के क्रम को बदलने पर, जोकि दिये गये प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है, हमें निम्न मान प्राप्त होता है :

$$(2\pi i)^{-2}\int_{L1}\int_{L2}\frac{\phi(s,t)\theta_1(s)\theta_2(t)\Gamma(c+\alpha s+\lambda t)\Gamma(d+\beta s+\mu t)}{\Gamma(c+d+(\alpha+\beta)s+(\lambda+\mu)t)\Gamma(b+\delta s+\nu t)}$$

$$\times\sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-m)_h(-n)_k(c+\alpha s+\lambda t)_h(\alpha+\beta s+\mu t)_k(b+\delta s+\nu t)_{h+k}}{h!k!(b+\delta s+\nu t)_h(b+\delta s+\nu t)_k(c+d+(\alpha+\beta)s+(\lambda+\mu)t)_{h+k}}$$

$$\times y^s z^t \, ds\, dt. \quad (2.2)$$

कार्लिज [1, p. 232 (1.1)] द्वारा प्राप्त निम्न सूत्र :

$$\sum_{r=0}^{m}\sum_{s=0}^{n}\frac{(-m)_r(-n)_s(c)_r(d)_s(b)_{r+s}}{r!s!(b)_r(b)_s(c+d)_{r+s}}=\frac{(c)_n(d)_m(b)_{m+n}}{(b)_m(b)_n(c+d)_{m+n}} \quad (2.3)$$

को प्राप्त मान (2·2) में सम्प्रयोग करने पर तथा प्राप्त फल को दो चरों वाले H-फलन हेतु परिभाषित (1.1) की सहायता से विवेचना करने पर फल (2.1) का दाहिना पक्ष प्राप्त होता है, जिससे परिणाम सिद्ध होता है।

3. विशिष्ट दशायें : इस अनुभाग में हम परिणाम (2.1) की कुछ रोचक विशिष्ट दशायें ज्ञात करेंगे।

(i) युगल श्रेणी सम्बन्ध (2.1) में $\beta=\nu=0$ का मान रखने पर निम्न युगल श्रेणी सम्बन्ध प्राप्त होता है :

$$\sum_{h=0}^{m}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-m)_h(-n)_k}{h!k!}$$

$$\times H^{0,n_1+1:m_2,n_2+1;m_3,n_3+1}_{p_1+1,q_1+1:p_2+1,q_2+2;p_3+1,q_3}\left[\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(1-c-h;\alpha,\lambda),((a_{p_1};\alpha_{p_1},A_{p_1})):\\((b_{q_1};\beta_{q_1},B_{q_1})),(1-c-d-h-k;\alpha,\lambda+\mu):\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(1-b-h-k,\delta),((c_{p_2},\gamma_{p_2}));(1-d-k,\mu),((e_{p_3},E_{p_3}))\\((d_{q_2},\delta_{q_2})),[1-b-h,1-b-k,(\delta)];((f_{q_3},F_{q_3}))\end{matrix}\right]$$

$$=H^{0,n_1+1:m_2,n_2+1;m_3,n_3+1}_{p_1+1,q_1+1:p_2+1,q_2+2;p_3+1,q_3}\left[\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(1-c-n;\alpha,\lambda),((a_{p_2},\alpha_{p_1},A_{p_1})):\\((b_{q_1},\beta_{q_1},A_{q_1})),(1-c-d-m-n;\alpha,\lambda+\mu):\end{matrix}\right.$$

$$\left.\begin{matrix}(1-b-m-n,\delta),((c_{p_2},\gamma_{p_2}));(1-d-m,\mu),((e_{p_3},E_{p_3}))\\((d_{q_2},\delta_{q_2})),[1-b-m,1-b-n,(\delta)];((f_{q_3},F_{q_3}))\end{matrix}\right] \quad (3.1)$$

(ii) यदि (3.1) में $\lambda=0$ रखें तथा μ को β द्वारा स्थानान्तरित करें तो हमें गुप्ता तथा गोयल [3, p.69 (2·4)] द्वारा पूर्वज्ञात सम्बन्ध प्राप्त होता है।

(iii) युगल श्रेणी सम्बन्ध (3.1) में $\lambda=\delta=0$ रखने पर तथा μ को β द्वारा स्थानांतरित करने पर हमें अन्य सम्बन्ध [3, p.68 (2.1]) मिलता है।

(iv) इसी प्रकार यदि $n=0$ तदनुसार $k=0$ को फल (2.1) में प्रविष्ट करने पर निम्न युगल श्रेणी सम्बन्ध प्राप्त होता है।

$$\sum_{h=0}^{m}\frac{(-m)_h}{h!}\times H^{0,n_1+3}_{p_1+3,q_1+3}\left[\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(1-c-h;\alpha,\lambda),(1-d;\beta,\mu),(1-b-h;\delta,\nu),((a_{p1},\alpha_{p1},A_{p1}))\\((b_{q1};\beta_{q1},B_{q1})),(1-c-d-h;\alpha+\beta,\lambda+\mu),[1-b-h,1-b;(\delta,\nu)]\end{matrix}\right]$$

$$=H^{0,n_1+3}_{p_1+3,q_1+3}\left[\begin{matrix}y\\z\end{matrix}\middle|\begin{matrix}(1-e;\alpha,\lambda),(1-d-m;\beta,\mu),(1-b-m;\delta,\nu),((a_{p1};\alpha_{p1},A_{p1}))\\((b_{q1};\beta_{q1},B_{q1})),(1-c-d-m;\alpha+\beta,\lambda+\mu),[1-b-m,1-b;(\delta,\nu)]\end{matrix}\right] \tag{3.2}$$

(v) यदि फल (3.2) में $\beta=\lambda=\nu=\delta=0$ रखें तथा μ को β से स्थानांतरित करें तो गुप्ता एवं गोयल [3, p.71 (3.5)] द्वारा एक अन्य पूर्वज्ञात सम्बन्ध प्राप्त होता है।

(vi) इसी प्रकार युगल श्रेणी सम्बन्ध (2.1) में $\beta=\nu=\lambda=\delta=0$, $n_1=p_1=q_1=n_3=p_3=0$, $m_3=q_3=1$, $f_1=0$, $F_1=1$ रखें तथा $z\to0$ हो तो हमें स्वतः ही फाक्स के H-फलन हेतु [3, p.71 (3.3)] युगल श्रेणी सम्बन्ध प्राप्त होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डॉ० पी० आनन्दानी का अत्यन्त आभारी है जिन्होंने इस शोध पत्र की तैयारी में मार्गदर्शन किया।

निर्देश

1. कार्लिज, एल०, रेण्ड, **सेम० मैथ० यूनि० पडोवा**, 1967, **37**, 230–233
2. फाक्स, सी०, **ट्रांजे० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395–429
3. गुप्ता, के० सी० तथा गोयल, एस० सी०, **ज्ञानाभ**, 1976, **6**, 67–72
4. मित्तल, पी० के० तथा गुप्ता, के० सी०, **प्रोसी० इंडियन एके० साइंस**, 1972, **75 ए**, 117–123
5. सिंह, नामप्रसाद, **विज्ञान परिषद् अनु० पत्रिका**, 1977, **20**, 385–392
6. सिंह, नाम प्रसाद तथा आनन्दानी, पी०, **जर्न० नैचु० साइंस मैथ०**, 1978, **18**, 33–42

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 4, October, 1980, Pages 323-330

गोले पर अपने परागोलीय प्रसार के द्वारा जनक फलन के सन्निकटन के सम्बन्ध में

एस० एस० रौतेला
गणित विभाग, राजकीय महाविद्यालय, जयहरि खल (लैंसडाउन), गढ़वाल

[प्राप्त—सितम्बर 19, 1978]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में निम्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया जावेगा :

यदि $F(w \pm t)-f(w)=(t^{\lambda} (\log 1/t)^{-\alpha})$ ज्यों-ज्यों $t \to +0$

तो $S_n=0 (\log n)^{-\alpha}$

बशर्ते कि $0<\lambda<1$ तथा $\alpha \geqslant -1$

Abstract

On the degree of approximation to the generating function by its ultraspherical expansion on a sphere. *By* S. S. Rautela, Department of Mathematics, Government Degree College, Jaiharikhal (Lansdowne), Garhwal.

In this paper we shall prove the theorem :

If $F(w \pm t)-f(w)=(t^{\lambda} (\log 1/t)^{-\alpha})$ as $t \to +0$

then $S_n=0 (\log n)^{-\alpha}$

provided that $0<\lambda<1$ and $\alpha \geqslant -1$.

1. माना कि $f(\theta,\phi)$ एक फलन है जो एक गोला S में परास $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi$ के लिये परिभाषित है। इस फलन से सम्वद्ध परागोलीय श्रेणी को

$$f(\theta,\phi) \sim 1/2\pi \sum_{0}^{\infty} (n+\lambda) \iint_S \frac{P_n^{(\lambda)}(\cos w)\, f(\theta',\phi')\, d\sigma'}{\sin^2\theta' \sin^2(\phi-\phi')^{1/2}}, \lambda \geqslant 0, \tag{1.1}$$

द्वारा प्रदर्शित किया जाता है

जहाँ $\cos w = \cos\theta \cos\theta' + \sin\theta \sin\theta' \cos(\phi - \phi')$.

तथा $d\sigma' = \sin\theta'\, d\theta' d\phi'$.

हम कल्पना करते हैं कि फलन

$$f(\theta',\phi') [\sin^2(\phi-\phi')]^{\lambda-1/2}$$

गोले के समस्त पृष्ठ पर समाकलनीय (L) है और काग्लेबेतियाँ[1] का अनुसरण करते हुये हम $f(\theta,\phi)$ के गोलीय माध्यमान को निम्न प्रकार परिभाषित करते हैं

$$f(w) = \frac{\Gamma(1/2)\Gamma(1/2+\lambda)}{2\pi\Gamma(\lambda)(\sin w)} \int_{cw} \frac{f(\theta',\phi')ds'}{(\sin^2\theta' \sin^2(\phi-\phi'))^{1/2-\lambda}} \tag{1.2}$$

जहाँ समाकल को गोले पर एक लघुवृत्त के हेतु लिया जाता है जिसका केन्द्र (θ,ϕ) है और वक्ररेखी त्रिज्या w है।

इस प्रकार श्रेणी (1.1) निम्नवत लिखी जा सकती है

$$f(\theta,\phi) \sim 1/2\pi \sum_{n=0}^{\infty} (n+\lambda) \int_0^{\pi} P_n^{(\lambda)} (\cos w) dw \int_{cw} \frac{f(\theta',\phi')ds'}{[\sin^2\theta' \sin^2(\phi-\phi')]^{1/2-\lambda}}$$

हम लिखेंगे

$$F(w) = f(w)(\sin w)^{2\lambda-1}.$$

माना कि बिन्दु (θ,ϕ) पर श्रेणी (1·1) क n वाँ आंशिक योगफल S_n है।

एक अर्वाचीन प्रपत्र में गुप्ता तथा साहनी[2] ने निग्नलिखित प्रमेय सिद्ध किया है।

प्रमेय A

यदि

$$F(w \pm t) - F(w) = 0(t^{\lambda} \log 1/t) \text{ ज्यों-ज्यों } t \to +0$$

तो

$$s_n = 0 (\log n)$$

वशर्ते कि $0 < \lambda < 1/2$.

प्रस्तुत प्रपत्र में हम निम्नलिखित को सिद्ध करेंगे :

प्रमेय 1

यदि

$$F(w \pm t) - F(w) = (t^{\lambda}(\log 1/t)^{-\alpha})$$

ज्यों-ज्यों $t \to +0$, तो

$$S_n = 0(\log n)^{-a}$$

बशर्ते कि $0 < \lambda < 1$ तथा $a \geqslant -1$

यह उल्लेखनीय है कि गुप्ता तथा साह्नी का प्रमेय प्रमेय 1 की विशिष्ट दशा है जो प्राचल के संशोधित परास में $a = -1$ के लिये है।

यह ज्ञात है कि (देखें जेगो [3], p. 84)

$$\sum_{k=0}^{n} (k+\lambda) P_n^{(\lambda)} (\cos\theta) = \frac{1}{2} \frac{(n+2)\left[P_n^{(\lambda)}(\cos\theta) - (n+1)P_{n+1}^{(\lambda)}(\cos\theta)\right]}{1-\cos\theta} \tag{2.1}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{d}{dx}\left[P_n^{(\lambda)}(x)\right] + \frac{d}{dx}\left[P_{n+1}^{(\lambda)}(x)\right]\right]\frac{dx}{x=\cos\theta}$$

अत: श्रेणी (1.1) के n वें आंशिक योग S_n को निम्न प्रकार लिखा जाता है

$$S_n = \frac{\Gamma(\ )}{2\Gamma(1/2)\Gamma(1/2+\lambda)} \int_0^{\pi} F(w)\left[\frac{d}{dx}\left[P_{n+1}^{(\lambda)}(x) - P_n^{(\lambda)}(x)\right]\right] \frac{(\sin w)^{2\lambda} dw}{x=\cos\theta}$$

$$= \frac{\Gamma(\lambda)}{2\Gamma(1/2)\Gamma(1(2+\lambda)} \int_0^{\pi} F(w)\left[\frac{d}{dx}\left[P_{n+1}^{(\lambda)}(x) + P_n^{(\lambda)}(x)\right]\right] \frac{\sin w\, dw}{x=\cos\theta}$$

$$= \int_0^{\pi} F(w) L_n(w) dw,$$

मान लो कि जहां

$$L_n(w) = \frac{\Gamma(\lambda)}{2\Gamma(1/2)\Gamma(1/2+\lambda)}\left[\frac{d}{dx}\left[P_{n+1}^{(\lambda)}(x) + P_n^{(\lambda)}(x)\right]\right] \frac{\sin w\, dw}{x=\cos\theta}$$

3. हमें अपने प्रमेय की उपपत्ति के लिये निम्नलिखित प्रमेयिकाओं की आवश्यकता होगी।

प्रमेयिका 1

$0 < \lambda < 1$ तथा $0 < k < \lambda$. के लिए।

$$L_n(w) = 0(n^{2\lambda+1} \sin w) \tag{3.1}$$

उपपत्ति के लिये गुप्ता[4] को देखें।

प्रमेयिका 2

$0 < \lambda < 1$ तथा $\pi - 1/n \leqslant w \leqslant \pi$ के लिए

$$L_n(w) = 0(n^{2\lambda} \sin w) \tag{3.2}$$

उपपत्ति के लिये गुप्ता[4] को देखें ।

प्रमेयिका 3

यदि

$$a_n \leqslant \theta \leqslant \pi - 1/n,\ a_n \geqslant 1/n,$$

एवं E_n वास्तविक अंश है

$$-\frac{2^{2-2\lambda}}{\pi}\lambda \sin \lambda\pi\, e^{i\pi(1/2-\lambda)}(\cot w)^{1-\lambda}(\sin w/2)^{1-2\lambda} \tag{3.3}$$

$$\times \int_{-\infty}^{w} (w-t)^{-\lambda-1} \left[e^{i(n+\lambda+1/2)w} - e^{i(n+\lambda+1/2)} \right] dt;$$

का तो

$$L_n(w) = E_n + 0[n^{\lambda-1}w^{-1}(\sin w)^{-\lambda} + n^{-1}(\sin w)^{-\lambda-1} + n^{\lambda-1}w^{-\lambda}(\sin w)^{-1} \tag{3.4}$$

उपपत्ति के लिये गुप्ता[4] को देखें ।

प्रमेयिका 4

यदि

$$a_n \leqslant w \leqslant \pi - 1/n,$$

तथा

$$\mu_n = \frac{\pi}{n+\lambda+1/2},$$

तो

$$E_n = R[w^{-\lambda}\phi(w)e^{i(n+\lambda+1/2)w}],$$

जहाँ $\phi(w)$ ऐसा है कि

$$\phi(w) = 0(n^{\lambda}),\ \phi(w+\mu_n) - \phi(w) \tag{3.5}$$

$$= 0(n^{-1}w^{-1})$$

उपपत्ति के लिये गुप्ता[4] को देखें ।

प्रमेयिका 5

$$a_n \leqslant w \leqslant \pi - 1/n$$

के लिये हमें ज्ञात है कि

$$L_n(w) = R\,[\xi(w)w^{-\lambda}\, e^{i(n+\lambda+1/2)w}] \tag{3.6}$$

$$+0(n^{\lambda-1}w^{-1}(\sin w)^{-\lambda}) + 0(n^{-1}(\sin w)^{-\lambda-1})$$

$$+0(n^{\lambda-1}w^{-\lambda}(\sin w)^{-1}$$

जहाँ $\xi(w)$ ऐसा है कि

$$\xi(w) = 0(n^{\lambda}),\ \xi(w+\mu_n) - \xi(w) = 0(n^{\lambda-1}w^{-1})$$

उपपत्ति गुप्ता[4] की तरह है ।

4 प्रमेय की उपपत्ति

सार्विकता के ह्रास बिना हम $f(P)=f(0)=0$ रख सकते हैं। इस प्रकार हम पाते हैं कि

$$S_n(w)=\int_0^\pi F(w)L_n(w)dw$$

$$=\left[\int_0^{\alpha n}+\int_{\alpha n}^{\pi-1/n}+\int_{\pi-1/n}^{\pi}\right]F(w)L_n(w)dw$$

$$=I_1+I_2+I_3, \text{ माना}$$

जब $\quad \alpha_n=(n)^{-(2\lambda+1)/(\lambda+2)}$

जो 1/2 से बड़ा है क्योंकि $0<\lambda<1$

प्रमेय की परिकल्पना एवं प्रमेयिका 1 से हमें प्राप्त है कि

$$|I_1|=\int_0^{\alpha n}F(w)L_n(w)dw$$

$$=0\left[n^{2\lambda+1}\int_0^{\alpha n}w.w^{\lambda}(\log 1/w)^{-\alpha}dw\right]$$

$$=0\left[n^{2\lambda+1}\int_0^{\alpha n}w^{\lambda+1}(\log 1/w)^{-\alpha}dw\right]$$

$$=0\left[n^{2\lambda+1}\alpha_n\left(\log\frac{1}{\alpha_n}\right)^{-\alpha}\int_0^{\alpha n}w^{\lambda}dw\right]$$

$$=0\left[n^{2\lambda+1}\alpha_n^{\lambda+2}\left(\log\frac{1}{n}\right)^{-\alpha}\right]$$

$$=0(\log n)^{-\alpha}. \tag{4.1}$$

पुनश्च, प्रमेयिका 2 से

$$|I_3|=\int_{\pi-1/n}^{\pi}F(w)L_n(w)dw,$$

$$=0(n^{2\lambda})\int_{\pi-1/n}^{\pi}\sin w\, dw,$$

$$=0(1). \tag{4.2}$$

अन्त में प्रमेयिकायें 3, 4 तथा 5 व्यवहृत करने पर

$$I_2=\int_{\alpha n}^{\pi-1/n}F(w)\xi(w)w^{-\lambda}e^{-\lambda}e^{i(n+\lambda+1/2)w}dw \tag{4.3}$$

$$+0\left[\int_{\alpha n}^{\pi-1/n} F(w)n^{\lambda-1}w^{-1}(\sin w)^{-\lambda}dw\right]$$

$$+0\left[\int_{\alpha n}^{\pi-1/n} F(w)n^{-1}(\sin w)^{-\lambda-1}dw\right],$$

$$+0\left[\int_{\alpha n}^{\pi-1/n} F(w)n^{\lambda-1}w^{-\lambda}(\sin w)^{-1}dw\right]$$

(4.3) के दक्षिण पक्ष के अन्तिम तीन पद हैं

$$0\left[n^{\lambda-1}\left\{\left(\int_{\alpha n}^{\pi/2} w^{\lambda}(\log 1/w)^{-\alpha}w^{-\lambda-1}dw\right)+\int_{\pi/2}^{\pi-1/n}(\sin w)^{-\lambda}dw\right\}\right]$$

$$+0\left[n^{-1}\left\{\int_{\alpha n}^{\pi/2} w^{\lambda}(\log 1/w)^{-\alpha}w^{-\lambda-1}dw+\int_{\pi/2}^{\pi-1/n}(\sin w)^{-\lambda-1}dw\right\}\right]$$

$$+0\left[n^{\lambda-1}\left\{\int_{\alpha n}^{\pi/2} w^{\lambda}(\log 1/w)^{-\alpha}w^{-\lambda-1}dw+\int_{\pi/2}^{\pi-1/n}(\sin w)^{-1}dw\right\}\right]$$

$$=0(\log n)^{-\alpha} \tag{4.4}$$

अब हम (4.3) में समाकल को इस प्रकार लिखते हैं

$$\frac{1}{2}\left[\int_{\alpha n}^{\pi-1/n} F(w)\xi(w)w^{-\lambda}e^{i(n+\lambda+1/2)w}dw\right.$$

$$\left.-\int_{\alpha n-\mu n}^{\pi-1/n-\mu n} F(w+\mu_n)\xi(w+\mu_n)(w+\mu_n)^{-\lambda}e^{i(n+\lambda+1/2)w}dw\right].$$

मँझले कोष्ठक का समाकल

$\frac{1}{2}(J_1+J_2+J_3+J_4+J_5)$ से छोटा है

जहाँ

$$J_1=\int_{\alpha n-\mu n}^{\alpha n} |F(w+\mu_n)\xi(w+\mu_n)(w+\mu_n)^{-\lambda}|\,dw,$$

$$J_2=\int_{\pi-1/n-\mu n}^{\pi-1/n} |F(w)\xi(w)w^{-\lambda}|\,dw.$$

$$J_3=\int_{\alpha n}^{\pi-1/n-\mu n} |F(w+\mu_n)-F(w)|\,|\xi(w+\mu_n)|\,(w+\mu_n)^{-\lambda}dw,$$

$$J_4=\int_{\alpha n}^{\pi-1/n-\mu n} |\xi\{(w+\mu_n)-\xi(w)|\,|\Gamma(w)|\,(w+\mu_n)^{-\lambda}dw$$

तथा

$$J_5=\int_{an}^{\pi-1[n-\mu n} |(w+\mu_n)^{-\lambda}-w^{-\lambda}|\ |F(w)|\ |\xi(w)|\ dw$$

प्रमेय के कथन के प्रतिबन्ध एवं प्रमेयिका 5 के परिणाम को व्यवहृत करने पर

$$J_1=0\left[\int_{an-\mu n}^{an} (w+\mu_n)^{\lambda}\left(\log\frac{1}{w+\mu_n}\right)^{-a} n^{\lambda}(w+\mu_n)^{-\lambda}dw\right]$$

$$=0\left[n^{\lambda}\left(\log\frac{1}{a_n}\right)^{-a}\mu_n\right]$$

$$=0(\log n)^{-a}, \tag{4.5}$$

$$J_2=0\left[\int_{\pi-1/n-\mu n}^{\pi-1/n} n^{\lambda}w^{-\lambda}dw\right]$$

$$=0(n^{\lambda}\mu_n)$$

$$=0(1), \tag{4.6}$$

$$J_3=0\left[\mu_n\left(\log\frac{1}{\mu_n}\right)^{-a} n^{\lambda}\int_{an}^{\pi}(w+\mu_n)^{-\lambda}dw\right]$$

$$=0[(\log n)^{-a}] \tag{4.7}$$

$$J_4=0\left[n^{\lambda-1}\int_{an}^{\pi} w^{-1}w^{\lambda}(\log 1/w)^{-a}w^{-\lambda}dw\right]$$

$$=0\left[n^{\lambda-1}\int_{an}^{\pi} w^{-1}(\log 1/w)^{-a}dw\right]$$

$$=0[(\log n)^{-a}] \tag{4.8}$$

तथा

$$J_5=0\left[\mu_n\int_{an}^{\pi} w^{-\lambda-1}w^{\lambda}(\log 1/w)^{-a}n^{\lambda}dw\right]$$

$$=0[(\log n)^{-\alpha} \tag{4.9}$$

इस प्रकार प्रमेय की उपपत्ति पूर्ण हुई।

कृतज्ञता-ज्ञापन

इस शोधपत्र की तैयारी में लेखक को डा० जी० एस० पाण्डेय से जो सहायता एवं सुझाव प्राप्त हुये उनके लिये वह आभारी है।

निर्देश

1. कागवेतलियाँ, ई०, J. Math. etem. 1924, **9**, 107–187

2. गुप्ता, डी० पी० तथा साहनी, बी० एन०, The Mathematical Student, 1974, XLII (1, 2, 3, 4) 373–342

3. जेगो, जी०, Orthogonial Polynomials, American Mathematical Society Colloquium Publications, 1939

4. गुप्ता, डी० पी०, **प्रोसी० नेशनल इंस्टी० साइंस, इंडिया**, 1958, **A 24**, 419–40

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23 No. 4, October, 1980, Pages 331-337

H-फलन वाले समाकल-II

नवरत्न राठी
गणित विभाग, एम० आर० इंजीनियरिंग कालेज, जयपुर

[प्राप्त—अगस्त 14, 1978]

सारांश

प्रस्तुत प्रपत्र में हाइपरज्यामितीय तथा H-फलन वाले कतिपय समाकलों का मान निकाला गया है। कुछ विशिष्ट दशायें भी दी गई हैं।

Abstract

Integrals involving H-function-II. *By* Navratna Rathie, Department of Mathematics, M. R. Engineering College, Jaipur.

In this paper some infinite integrals involving hypergeometric and the H-function have been evaluated. Some interesting particular cases have also been given.

1. प्रस्तावना

फाक्स[1] द्वारा प्रवर्तित H-फलन को निम्न प्रकार से परिभाषित एवं प्रदर्शित किया जावेगा

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z \left| \begin{matrix} (a_j,\alpha_j)_{1,p} \\ (b_j,\beta_j)_{1,q} \end{matrix} \right.\right] = (2\pi i)^{-1} \int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j-\beta_j s) \prod_{j=1}^{n} \Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q} \Gamma(1-b_j+\beta_j s) \prod_{j=n+1}^{p} \Gamma(a_j-\alpha_j s)} z^s \, ds \qquad (1.1)$$

जहाँ रिक्त गुणनफल को इकाई माना जाता है; $1 \leqslant m \leqslant q$; $0 \leqslant n \leqslant p$; $\alpha_j (j=1,\ldots,p)$ तथा $\beta_j (j=1,\ldots,q)$ सभी धनात्मक संख्यायें हैं; $a_j (j=1,\ldots,p)$ तथा $b_j (j=1,\ldots,q)$ सभी सम्मिश्र संख्याएँ हैं; L मेलिन-

बार्निज प्रकार का ऐसा उपयुक्त कंटूर है कि $\Gamma(b_j-\beta_j s)(j=1,..,m)$ के समस्त पोल कंटूर के दाहिनी ओर तथा $\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)(j=1,...,n)$ के उसके बाईं ओर पड़ें।

ब्राक्समा[2] ने सिद्ध किया है कि (1.1) के दक्षिण पक्ष का समाकल परम अभिसारी है जब $\theta>0$ तथा $|\arg z|<\theta\pi/2$,

जहाँ

$$\theta=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j-\sum_{j=n+1}^{p}\alpha_j+\sum_{j=1}^{m}\beta_j-\sum_{j=m+1}^{q}\beta_j \tag{1.2}$$

H-फलन के उपयोगी प्रसारों एवं विश्लेषिक सातत्यों की पूर्ण विवेचना ब्राक्समा[1] ने दी है।

हमें H-फलन के निम्नांकित गुण की आवश्यकता होगी

$$H_{p,q}^{m,n}\left[z\,\middle|\,\begin{matrix}(a,N\alpha),(a_j,\alpha_j)_{2,p}\\(b,N\beta),(b_j,\beta_j)_{2,q}\end{matrix}\right]$$
$$=(2\pi)^{1-N}N^{b-a}H_{p+N-1,q+N-1}^{m+N-1,n+N-1}\left[zN^{N\alpha-N\beta}\,\middle|\,\begin{matrix}\triangle[(N,a),\alpha],(a_j,\alpha_j)_{2,p}\\\triangle[(N,b),\beta],(b_j,\beta_j)_{2,q}\end{matrix}\right] \tag{1.3}$$

जहां N धनात्मक पूर्णांक है तथा

$$\triangle[(N,a),\alpha]=\left(\frac{a}{N},\alpha\right),\left(\frac{a+1}{N},\alpha\right),\ldots,\left(\frac{a+N-1}{N},\alpha\right).$$

2. मुख्य परिणाम

सर्वप्रथम हम निम्नांकित परिणामों को सिद्ध करेंगे

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2\mu}{}_2F_1\left(\alpha,\beta;2\lambda;\frac{2t^{1/2}}{t^{1/2}+(1+t)^{1/2}}\right)dt \tag{2.1}$$
$$=2^{1-2\lambda}\frac{\Gamma(2\lambda)\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu-\alpha-\beta)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu-\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu-\beta)}$$

जहाँ $Re(\lambda)>0,\ Re(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)>0,\ Re(2\lambda-\alpha-\beta)>0.$

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2\mu}{}_2F_1(\alpha,\beta;\tfrac{1}{2}-\lambda-\mu;[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{-2})dt \tag{2.2}$$
$$=2^{1-2\lambda}\frac{\Gamma(2\lambda)\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu-\alpha-\beta)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu-\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu-\beta)}$$

जहाँ $Re(\lambda)>0,\ Re(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)>0,\ Re(\frac{1}{2}-\lambda-\mu-\alpha-\beta)>0.$

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2\mu}{}_2F_1\left(\alpha,\tfrac{1}{2}+\lambda-\mu;\gamma;\frac{2t^{1/2}}{t^{1/2}+(1+t)^{1/2}}\right)dt \tag{2.3}$$

$$=2^{1-2\lambda}\frac{\Gamma(2\lambda)\Gamma(\gamma)\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)\Gamma(\gamma-a-2\lambda)}{\Gamma(\gamma-a)\Gamma(\gamma-2\lambda)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu)}$$

जहाँ $Re(\lambda)>0,\ Re(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)>0,\ Re(\gamma+\mu-\lambda-a-\frac{1}{2})>0.$

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2\mu}{}_2F_1(a,\tfrac{1}{2}+\lambda-\mu;\gamma;[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{-2})dt \tag{2.4}$$

$$=2^{1-2\lambda}\frac{\Gamma(\gamma)\Gamma(2\lambda)\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)\Gamma(\gamma-a+\lambda+\mu-\frac{1}{2})}{\Gamma(\gamma-a)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu)\Gamma(\gamma+\lambda+\mu-\frac{1}{2})}$$

जहाँ $Re(\lambda)>0,\ Re(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)>0,\ Re(\gamma-a-\lambda+\mu-\frac{1}{2})>0.$

उपपत्तियां

(2·1) को सिद्ध करने के उद्देश्य से हाइपरज्यामितीय फलन को एक श्रेणी के रूप में व्यक्त करते हैं, और समाकलन एवं संकलन के क्रम को बदलते हैं जो अन्तराल $(0, \infty)$ में श्रेणी के एकसमान अभिसरण के कारण वैध है, ज्ञात फल [3, p·17] की सहायता से समाकल का मान निकालते हैं और तब श्रेणियों को जोड़ते हैं तो अन्त में हमें परिणाम (2·1) प्राप्त होता है।

(2·2), (2·3) एवं (2·4) की उपपत्तियाँ इसी आधार पर विकसित की जा सकती हैं।

प्रस्तुत प्रपत्र में निम्नलिखित समाकलों का मूल्यांकन किया गया है।

प्रथम समाकल

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2\mu}{}_2F_1(a,\beta;\tfrac{1}{2}-\lambda-\mu;[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{-2}) \tag{2.5}$$

$$\times H_{p,q}^{m,n}\left[zt^{\sigma/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{-\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right]dt$$

$$=2^{1-2\lambda}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\lambda-\mu)\ H_{p+2,q+2}^{m,n+2}\left[z2^{-\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}(1-2\lambda,\sigma);(\frac{1}{2}-\lambda+\mu+a+\beta,\sigma),(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q},(\frac{1}{2}-\lambda+\mu+a,\sigma),(\frac{1}{2}-\lambda+\mu+\beta,\sigma)\end{matrix}\right]$$

जहाँ $Re\left(\lambda+\sigma/2\,\frac{b_j}{\beta_j}\right)>0,\ j=1,\ldots,m,\ Re(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)>0,\ Re(\frac{1}{2}-\lambda-\mu-a-\beta)>0,\ \sigma>0, \theta>0,$ $|arg\ z|<\frac{\theta\pi}{2}$, जहाँ θ वैसा है जैसा कि (1.2) में।

द्वितीय समाकल

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2\mu}{}_2F_1\left(a,\beta;2\lambda;\frac{2t^{1/2}}{t^{1/2}+(1+t)^{1/2}}\right) \tag{2.6}$$

$$\times H_{p,q}^{m,n}\left[z[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{-2\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1\cdot p}\\(b_j,\beta_j)_{1\cdot q}\end{matrix}\right]dt$$

$$=2^{1-2\lambda}\Gamma(2\lambda)\, H^{m,n+2}_{p+2,q+2}\left[z \,\middle|\, \begin{matrix}(\frac{1}{2}+\lambda+\mu,\sigma),(\frac{1}{2}-\lambda+\mu+\alpha+\beta,\sigma),(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q},(\frac{1}{2}-\lambda+\mu+\alpha,\sigma),(\frac{1}{2}-\lambda+\mu+\beta,\sigma)\end{matrix}\right]$$

जहाँ $Re(\lambda)>0$, $Re(2\lambda-\alpha-\beta)>0$, $Re\left(\lambda+\mu-\sigma\frac{b_j}{\beta_j}\right)<\frac{1}{2}$, $j=1,\ldots,m$, $\sigma>0$, $\theta>0$, $|arz|<\frac{\theta\pi}{2}$ जहाँ θ वैसा ही है जैसा (1.2) में ।

तृतीय समाकल

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2\mu}{}_2F_1\left(\alpha,\tfrac{1}{2}+\lambda-\mu;\gamma;\frac{2t^{1/2}}{t^{1/2}+(1+t)^{1/2}}\right) \tag{2.7}$$
$$\times H^{m,n}_{p,q}\left[z\, t^{\sigma/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right]dt$$

$$=\frac{2^{1-2\lambda}\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu)}H^{m+2,n+1}_{p+2,q+2}\left[z\,2^{-\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}(1-2\lambda,\sigma),(a_j,\alpha_j)_{1,p},(\gamma-2\lambda,\sigma)\\(\gamma-\alpha-2\lambda,\sigma),(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\sigma),(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right]$$

जहाँ $Re(\gamma-\alpha-\lambda+\mu)>\frac{1}{2}$, $Re\left(\lambda+\sigma/2\frac{b_j}{\beta_j}\right)>0$, $j=1,\ldots m$, $Re\left(\lambda+\mu+\sigma\frac{a_j-1}{\alpha_j}\right)<\frac{1}{2}$, $j=1,\ldots,n$, $\sigma>0$, $\theta>0$, $|arg\, z|<\frac{\theta\pi}{2}$, जहाँ θ वैसा ही है जैसा (1.2) में ।

चतुर्थ समाकल

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2\mu}{}_2F_1(\alpha,\tfrac{1}{2}+\lambda-\mu;\gamma;[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{-2})$$
$$\times H^{m,n}_{p,q}\left[z\, t^{\sigma/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right]dt$$

$$=\frac{2^{1-2\lambda}\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\lambda-\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu)}H^{m+1,n+2}_{p+2,q+2}\left[z\,2^{-\sigma}\,\middle|\,\begin{matrix}(1-2\lambda,\sigma),(\frac{3}{2}+\alpha-\gamma-\lambda-\mu,\sigma),(a_j,\alpha_j)_{1,p}\\(\frac{1}{2}-\lambda-\mu,\sigma),(b_j,\beta_j)_{1,q},(\frac{3}{2}-\gamma-\lambda-\mu,\sigma)\end{matrix}\right] \tag{2.8}$$

जहाँ $Re(\gamma-\alpha-\lambda+\mu)>\frac{1}{2}$, $Re\left(\lambda+\sigma/2\frac{b_j}{\beta_j}\right)>0$, $j=1,\ldots,m$,

$Re\left(\lambda+\mu+\sigma\frac{a_j-1}{\alpha_j}\right)<\frac{1}{2}$, $j=1,\ldots,n$, $\sigma>0$, $\theta>0$, $|arg\, z|<\frac{\theta\pi}{2}$

जहाँ θ वैसा ही है जैसा (1.2) में ।

उपपत्तियां

(2.5) को सिद्ध करने के लिये वाम पक्ष को I से अंकित करते हैं, H-फलन को मेलिन-बार्निज समाकल के पदों में व्यक्त करते हैं एवं समाकलन के क्रम को उलटते हैं जो ऊपर कथित प्रतिबन्धों के अन्तर्गत वैध है क्योंकि प्रक्रिया में निहित समाकल पूर्णतया अभिसारी हैं, तो हमें (2.9) प्राप्त होता है ।

$$I=(2\pi i)^{-1}\int_L \frac{\prod_{j=1}^{m} \Gamma(b_j-\beta_j s)\prod_{j=1}^{n}\Gamma(1-a_j+\alpha_j s)}{\prod_{j=m+1}^{q}\Gamma(1-b_j+\beta_j s)\prod_{j=n+1}^{p}\Gamma(a_j-\alpha_j s)} z^s \tag{2.9}$$

$$\times\left\{\int_0^\infty t^{\lambda+\sigma/2s-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2(\mu-\sigma s/2)}{}_2F_1(a,\beta;\tfrac{1}{2}-\lambda-\mu;[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{-2})\,dt\right\}$$

अब परिणाम (2.2) की सहायता से आन्तरिक समाकल का मान ज्ञात करते हुये एवं फिर (1.1) की सहायता से व्याख्या करते हुये अन्त में हमें परिणाम (2.5) की प्राप्ति होती है।

इसी प्रकार से (2·6), (2·7) तथा (2·8) को क्रमशः (2·1), (2·3) एवं (2·4) परिणामों का उपयोग करके प्राप्त किया जा सकता है।

3. विशिष्ट दशायें

(i) (2.5) में $a_1=\frac{1}{2}-\lambda+\mu+a$, $a_2=\frac{1}{2}-\lambda+\mu+\beta, \alpha_1=\alpha_2=\sigma$ रखने पर H-फलन के लिये निम्नलिखित समाकल निरूपण प्राप्त होता है।

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2\mu}{}_2\mathrm{F}_1(a,\beta;\tfrac{1}{2}-\lambda-\mu;[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{-2})$$

$$\times H^{m,n}_{p,q}\left[z\, t^{\sigma/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{-\sigma}\,\middle|\, \begin{matrix}(\frac{1}{2}-\lambda+\mu+a,\sigma),(\frac{1}{2}-\lambda+\mu+\beta,\sigma),(a_j,\alpha_j)_{3,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right]dt$$

$$=2^{1-2\lambda}\Gamma(\tfrac{1}{2}-\lambda-\mu)H^{m,n}_{p,q}\left[z\, 2^{-\sigma}\,\middle|\, \begin{matrix}(1-2\lambda,\sigma),(\frac{1}{2}-\lambda+\mu+a+\beta,\sigma),(a_j,\alpha_j)_{3,p}\\(b_j,\beta_j)_{1,q}\end{matrix}\right] \tag{3.1}$$

जहां $Re(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)>0$, $Re(\lambda+\mu+a+\beta)<\frac{1}{2}$, $Re\left(\lambda+\sigma/2\frac{b_j}{\beta_j}\right)>0, j=1,\ldots,m,\ \sigma>0,\ \phi>0,$

$|arg\ z|<\frac{\phi\pi}{2}$, जहां

$$\phi=2\sigma+\sum_{j=3}^{n}\alpha_j-\sum_{j=n+1}^{p}\alpha_j+\sum_{j=3}^{m}\beta_j-\sum_{j=m+1}^{q}\beta_j.$$

(ii) (3·1) में $m=\sigma=1$, $n=p=q=2$, $b_1=0$, $b_2=1-a$, $\beta_1=\beta_2=1$ रखने एवं परिणाम 5, p. 437] को प्रयुक्त करने पर हमें

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2\mu}{}_2F_1(a,\beta;\tfrac{1}{2}-\lambda-\mu;[t^{1/2}(1+t)^{1/2}]^{-2}) \tag{3.2}$$

$$\times{}_2F_1\left(\tfrac{1}{2}+\lambda-\mu-a,\tfrac{1}{2}+\lambda-\mu-\beta;a;-\frac{z\,t^{1/2}}{t^{1/2}+(1+t)^{1/2}}\right)dt$$

$$=\frac{2^{1-2\lambda}\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)\Gamma(2\lambda)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu-\alpha-\beta)}{\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu-\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu-\beta)}$$

$$\times{}_2F_1\left(2\lambda,\tfrac{1}{2}+\lambda-\mu-\alpha-\beta;\alpha;-\frac{z}{2}\right)$$

प्राप्त होता है जहाँ $Re(\lambda)>0, Re(\frac{1}{2}-\lambda-\mu-\alpha-\beta)>0$, $Re(\frac{1}{2}-\lambda-u)>0$, $|arg z|<\pi$.

(iii) (3·1) में $\sigma=1, m=n=p=q=2, b_1=0, b_2=\frac{1}{2}-\lambda+\mu$ रखने तथा परिणाम [6,p.737, Eq. (3·2)], का उपयोग करने पर

$$\int t^{\lambda-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{\mu}{}_2F_1\left(\alpha,\beta;\tfrac{1}{2}-\lambda-\mu;[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{-2}\right) \tag{3.3}$$

$$\times{}_2F_1\left(\begin{matrix}\frac{1}{2}+\lambda-\mu-\alpha,\frac{1}{2}+\lambda-\mu-\beta\\ \frac{3}{2}+\lambda-\mu-\alpha-\beta\end{matrix};1-\frac{z\,t^{1/2}}{t^{1/2}+(1+t)^{1/2}}\right)dt$$

$$=\frac{2^{1-2\lambda}\Gamma(2\lambda)\Gamma(1-\alpha-\beta)\Gamma(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda+\mu)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu-\alpha-\beta)\Gamma(\frac{3}{2}+\lambda-\mu-\alpha-\beta)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(1-\beta)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu-\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu-\beta)\Gamma(1+2\lambda-\alpha-\beta)}$$

$$\times{}_2F_1\left(2\lambda,\tfrac{1}{2}+\lambda-\mu-\alpha-\beta;1+2\lambda-\alpha-\beta;1-\frac{z}{2}\right)$$

जहाँ $Re(\lambda)>0$, $Re(\frac{1}{2}-\lambda-\mu)>0$, $Re(\frac{1}{2}-\lambda-\mu-\alpha-\beta)>0$, $Re(\frac{1}{2}-\lambda+\mu)>0$, $|arg\ z|<2\pi$.

(iv) (2·7) में $\alpha=0, \mu=\lambda-\frac{1}{2}, m=q=2, n=0, p=1, a_1=1-k, \sigma=1, b_1=\frac{1}{2}+m, b_2=\frac{1}{2}-m, \alpha_1=\beta_1=\beta_2=1$ रखने पर, 2λ के स्थान पर k रखने तथा परिणाम [4,p· 435] को प्रयुक्त करने पर व्हिटेकर फलन के लिये निम्नलिखित समाकल निरूपण प्राप्त होता है :

$$\int_0^\infty t^{1/2k-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{k-1}e^{-\frac{z}{2}t+\sqrt{(t+t2)})}W_{k,m}(z[t+\sqrt{(t+t^2)}])\,dt \tag{3.4}$$

$$=2^{1-k}\Gamma(\tfrac{1}{2}+k\pm m)e^{-z/4}W_{-k,m}\left(\frac{z}{2}\right.$$

जहाँ $Re(\frac{1}{2}+k\pm m)>0$, $|arg\ z|<\pi/2$.

(v) (2·7) में $m=q=2, n=p=0, b_1=\nu, b_2=-\nu, \sigma=1, \beta_1=\beta_2=1$ रखने तथा परिणाम [4, p· 434 & p· 439], का प्रयोग करने पर

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2\mu}{}_2F_1\left(\alpha,\tfrac{1}{2}+\lambda-\mu;\gamma;\frac{2t^{1/2}}{t^{1/2}+(1+t)^{1/2}}\right) \tag{3.5}$$

$$\times K_{2\nu}(2\sqrt{(z[t+\sqrt{(t+t^2)}])})dt$$

$$= \frac{z^{-2\lambda}\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\Gamma(\frac{1}{2}+\lambda-\mu)} E\left(\gamma-\alpha, \tfrac{1}{2}+\lambda-\mu, 2\lambda+\nu, 2\lambda-\nu; \gamma; \frac{z}{2}\right)$$

जहाँ $Re(\lambda \pm \nu/2) > 0$, $|arg\ z| < \pi$.

(vi) (2·8) में $\sigma=1$, $m=n=p=q=1$, $a_1=3/2-\gamma-\lambda-\mu$, $b_1=0$, $\alpha_1=\beta_1=1$ रखने तथा परिणाम [6, p. 737] का प्रयोग करने पर

$$\int_0^\infty t^{\lambda-1}(1+t)^{-1/2}[t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{2\mu}[1+z(t+\sqrt{(t+t^2)})]^{1/2-\gamma-\lambda-\mu} \tag{3.6}$$

$$\times {}_2F_1(\alpha, \tfrac{1}{2}+\gamma-\mu; \gamma; [t^{1/2}+(1+t)^{1/2}]^{-2})dt$$

$$= \frac{2^{1-2\lambda}\Gamma(\gamma)\Gamma(2\lambda)\Gamma(\gamma+\lambda+\mu-\alpha-\frac{1}{2})}{\Gamma(\gamma+\lambda+\mu-\frac{1}{2})\Gamma(2\lambda+\gamma-\alpha)}$$

$$\times {}_2F_1\left(2\lambda, \gamma+\lambda+\mu-\alpha-\tfrac{1}{2}; 2\lambda+\gamma-\alpha; 1-\left(\frac{z}{2}\right)\right)$$

जहाँ $Re(\lambda)>0$, $Re(\gamma)>0$, $Re(\gamma-\alpha-\lambda+\mu-\frac{1}{2})>0$, $|arg\ z| < \pi$.

(vii) (2·7) तथा (2·8) में $a=0$, $\alpha_j=\beta_j=1$, रखने, σ के स्थान पर $2k$ रखने तथा गुण (1·3) का प्रयोग करने पर हमें सक्सेना का ज्ञात परिणाम [5, p. 349, Eq. (9)] प्राप्त होता है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक विश्वविद्यालय अनुदान आयोग का आर्थिक सहाय्य के लिये तथा डा० के० सी० गुप्ता का पथप्रदर्शन के लिये आभारी है।

निर्देश

1. फाक्स, सी०, **ट्रांजै० अमे० मैथ० सोसा०**, 1961, **98**, 395-429
2. ब्राक्समा, बी० ए० जे०, Compos. Math, 1963, **15**, 239-341
3. ल्यूक, वाई० एल०, भाग 1, एकेडमिक प्रेस, न्यूयार्य, 1966
4. एर्डेल्यी, ए० इत्यादि Tables of Integral Transforms, भाग II, मैकग्राहिल, न्यूयार्क, 1954
5. सक्सेना, आर० के०, **प्रोसी० कैम्ब्रि० फिला० सोसा०**, 1963, **59**, 347-50
6. शर्मा, के० सी०, **प्रोसी० नेश० इंस्टी० साइंस इंडिया**, 1964, **30** (6), 736-42

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 4, October 1980, Pages 339-343

भारी धातु हैलाइडों की बन्धन ऊर्जा

बी० आर० चतुर्वेदी तथा आर० पी० पाण्डेय
रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय, इलाहाबाद

[प्राप्त—दिसम्बर 10, 1979]

सारांश

स्थितिज ऊर्जा फलन के विभिन्न समघातों का प्रयोग करके चौदह भारी धातु हैलाइडों की वन्धन ऊर्जा की परिकल्पना की गई है। प्रस्तुत प्रपत्र में इस उद्देश्य के लिए प्रयुक्त सभी विभव फलनों में गाउसियन विभव फलन श्रेष्ठतम पाया गया है।

Abstract

Binding energy of heavy metal halides. *By* B. R. Chaturvedi and R. P. Pandey, Department of Chemistry, University of Allahabad, Allahabad.

The binding energy of fourteen heavy metal halides has been computed using different forms of potential energy function. The present paper deals that Gussian potential is best among all the potentials used for this purpose.

बंधन ऊर्जा का प्रयोगात्मक निर्धारण काफी कठिन कार्य है। प्रतिकर्षण के चरघातांकी फलन व व्युत्क्रम घात फलन की सहायता से भारी धातु हैलाइडों की बंधन ऊर्जा की परिकल्पना करने के विभिन्न प्रयास किये जा चुके हैं, परन्तु इन भारी धातु हैलाइडों की गैसीय अवस्था में इस बंधन ऊर्जा के बारे में बहुत कुछ कम ज्ञान प्राप्त है। यद्यपि डाब्स तथा जोन्स[1] ने अपने प्रपत्र में यह विचार प्रकट किया है कि प्रतिकर्षी विभव का चरघातांकी समघात जालक-गुणों की परिकल्पना में किंचित जटिल है, सम्भवतः यह पूर्ण विभव के निम्नतम (minima) के निकट क्षेत्र में वैध नहीं है, जो कि जालक-गुणों का आवश्यक भाग है। हाल में[2] इन्हीं अणुओं के ऊर्जिकी (energetics) की परिकल्पना करने के लिये तीन लॉगेरिथ्मीय विभव फलनों का प्रयोग किया गया है और अभी बहुत ही हाल में सिंह-शर्मा[3] द्वारा एक नवीनतम अन्योन्य क्रिया विभव दिया गया है। प्रस्तुत प्रपत्र में चौदह महत्वपूर्ण धातु हैलाइडों के बंधन ऊर्जा की परिकल्पना विभिन्न प्रकार से जैसे कि बार्न-लैन्डे[4], बार्न-मेयर[5], गाउसियन या वार्ष्णेय-शुक्ला[6], पटेल

गोयल-त्रिवेदी[7], पुरी[8] एवं सिंह-शर्मा[3], अन्योन्य क्रिया विभवों के समघातों का प्रयोग करके की गयी है और इन सभी विभवों का पारस्परिक तुलनात्मक अध्ययन किया गया है।

सिद्धांत

अणुओं में बंधन ऊर्जा शुद्धतम रूप से आयनों के बीच में स्थिर वैद्युत अन्योन्य क्रियाओं के कारण होती है। विभिन्न प्रकार के अन्योन्य क्रिया विभव के समघात व्यंजकों द्वारा निम्न प्रकार प्रदर्शित किये जा सकते हैं—

$$U(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{b}{r^n} \qquad \text{(वार्न-लैन्डे)} \qquad (1)$$

$$U(r) = -\frac{e^2}{r} + B\exp\left(-\frac{r}{p}\right) \qquad \text{(वार्न-मेयर)} \qquad (2)$$

$$U(r) = -\frac{e^2}{r} + P\exp(-kr^2) \qquad \text{(वर्ष्णेय-शुक्ला गाउसियन)} \qquad (3)$$

$$U(r) = -\frac{e^2}{r} + k_1\exp(-p_1 r^{3/2}) \qquad \text{(पटेल-गोयल-द्विवेदी)} \qquad (4)$$

$$U(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{b_1}{r} e^{-\lambda r} \qquad \text{(पुरी)} \qquad (5)$$

$$U(r) = -\frac{e^2}{r} + \frac{p_2}{r}\exp(-k_2 r^2) \qquad \text{(सिंह-शर्मा)} \qquad (6)$$

जहाँ पर प्रत्येक संकेत अपना-अपना अर्थ रखते हैं। विभव प्राचल निम्न परिस्थितियों में परिकलित किये जा सकते हैं।

$$\left(\frac{du}{dr}\right) r = r_e = 0 \qquad (7)$$

$$\left(\frac{dv^2}{dr^2}\right) r = r_e = k_e \qquad \text{(बल स्थिरांक)} \qquad (8)$$

जहाँ r_e अन्तरकेन्द्रीय दूरी है।

बन्धन ऊर्जा (Di) को निम्न सम्बन्ध द्वारा दर्शाया जा सकता है।

$$Di = -U(r_e)$$

सारणी 1 भारी धातु हैलाइड अणुओं के साम्य अन्तर-केन्द्रीय दूरी (r_e), बल स्थिरांक (ke) एवं बंधन ऊर्जा (Di) का मान Di (KJ mole^{-1})

अणु	r_e ($A°$)	k_e 10^{-5} dyne/cm	वार्न-लेन्डे	वार्न-मेयर	वार्ष्णेय-शुक्ला या गाउसियन	पटेल, गोयल त्रिवेदी या परिवर्तित गाउसियन	पुरी	सिंह एवं शर्मा	प्रयोगात्मक
TiF	2.0844*	2.310*	600.1	606.1	611.1	603.7	605.6	610·3	645.6
TlCl	2.4848*	1.453*	506.5	511.0	514.8	512.9	510.6	514.5	590.4
TlBr	2.6181*	1.767*	494.5	496.8	498.8	497.8	496.6	503.4	548.9
TlI	2.8135*	1.037*	448.8	452.5	455.7	454.2	452.2	455.2	533.5
InCl	2.4011*	1.586*	523.4	528.2	532.2	530.3	527.8	531.6	629.6
InBr	2.5432*	1.366*	495.3	499.6	503.2	501.5	499.2	502.7	519.2
InI	2.7539*	1.114*	458.8	462.6	465.8	464.3	462.3	465.3	509.2
GaCl	2.2017*	1.952*	567.9	573.6	578.8	576.1	573.2	577.6	573.2
GaBr	2.3525*	1.516*	528.6	534.5	539.2	536.9	533.9	538.5	568.2
GaI	2.5747*	1.232*	486.1	490.9	494.9	492.9	490.4	494.3	543.9
AgCl	2.8808**	1.833†††	457.9	459.1	460.2	459.6	459.1	460.1	—
AgBr	2.3922***	1.6785,,	527.6	532·0	535.1	533.9	531.7	535.2	—
CuCl	2.0500†	1.284,,	606.4	612.2	618.7	619.1	612.6	617.8	—
CuI	2.3340††	1.734,,	538.7	543.6	547.6	545.7	542.8	547.1	—
औसत प्रतिशत त्रुटि			10.4%	8.9%	7.5%	8.6%	8.9%	8.5%	—

* बैरट एवं मंडल 1958 निर्देश (11)

** फिशर, एल० सी० तथा मोरिस, डब्लू० जी०, **जर्न० केमि० फिजि०** 1966, **44**, 39.

*** फिशर, एल० सी० तथा मोरिस, डब्लू० जी०, **जर्न० केमि० फिजि०** 1966, **44**, 947.

† राव, पी० आर० के०, असुन्डी, आर० के० तथा बार्डी, जे० के०, **फैराड० जर्न० फिजि०**, 1262, **40**, 412.

†† नायर, केपी० आर० तथा उपाध्याय , के० एन०, **फैराड० जर्न० फिजि०** 1966, **44**, 1267.

††† माथुर एवं सिंह, 1967, निर्देश 10.

उपरोक्त समीकरण में हम समीकरण 1 से 6 तक के द्वारा प्राप्त U के मान का प्रतिस्थापन करके Di का मान अलग-अलग प्राप्त कर सकते हैं। बन्धन ऊर्जा की प्रायोगिक मान या आदर्श मान हम निम्न समीकरण द्वारा ज्ञात कर सकते हैं।

$$Di = -De + I - E \tag{10}$$

जहाँ De वियोजित ऊर्जा, I आयनन विभव तथा E इलेक्ट्रान-बंधुता है और इनका मान साहित्य से क्रमशः वैरट एवं मंडल[11], मैसी[12] तथा वार्किंग एवं बेथे[13] के कार्यों से प्राप्त किया गया है।

परिणाम तथा विवेचना

सारणी 1 में बंधन ऊर्जा की परिकल्पना के लिए आवश्यक सभी आँकड़े उनके स्रोतों के साथ दर्शाये गये हैं। विभिन्न प्रकार के विभव फलनों (समीकरण 1-6) से परिकल्पित बंधन ऊर्जा (Di) के मानों को भी सारणी 1 में ही दर्शाया गया है। वार्न-लेन्डे विभव के प्रयोग से परिकल्पित बंधन ऊर्जा के मान और इसके प्रायोगिक मान में प्रतिशत विचलन 0·9 से 16·9 तक है जबकि वार्न-मेयर विभव के मान से परिकल्पित Di के मान व इसके प्रायोगिक मान में विचलन 0·7 से 16·1 प्रतिशत है। इस प्रकार वार्न-मेयर विभव वार्न-लेन्डे विभव के ऊपर थोड़ा तीक्ष्ण है। गाउसियन (वार्ष्णेय-शुक्ला) विभव से परिकल्पित बंधन ऊर्जा, प्रायोगिक Di के मान की तुलना मे −0·9% से 14·6% तक विचलित होती है जबकि रूपांतरित गाउसियन (पटेल-गोपाल-त्रिवेदी) विभव से परिकल्पित Di के मान का विचलन −0·5 और 15·8% के बीच है। पुरी के विभव तथा नवनिर्मित सिंह-शर्मा विभव की सहायता से परिकलित बंधन ऊर्जा के मान प्रयोगिक Di मान से क्रमशः 0 प्रतिशत से 16.2 प्रतिशत तथा −0·8 से 15·6% के बीच विचलन करते हैं। सारणी 1 के गहन अध्ययन से पता चलता है कि गाउसियन विभव से परिकलित बंधन ऊर्जा का औसत विचलन 7·5% है जो कि अन्य विभवों से परिकलित बंधन ऊर्जा के औसत विचलन से कम है। गाउसियन विभव के उपयोग से परिकलन की गई बंधन ऊर्जा के मान अन्य की अपेक्षा अपने प्रायोगिक बंधन ऊर्जा से काफी निकट हैं। इससे यह स्पष्ट होता है कि गाउसियन विभव फलन अन्य सभी विभव-फलनों की अपेक्षा श्रेष्ठतम है।

कृतज्ञता-ज्ञापन

वैज्ञानिक एवं औद्योगिक अनुसन्धान परिषद् एवं विश्वविद्यालय अनुदान आयोग को अनुदान के लिए क्रमशः बी० आर० चतुर्वेदी तथा आर० पी० पाण्डेय द्वारा आभार प्रकट किया जाता है। डा० जे० डी० पाण्डेय के भी वे लोग आभारी हैं जिन्होंने इस कार्य के प्रारम्भ में सहायता की।

निर्देश

1. डाब्स, ई० आर० तथा जोन्स, जी० ओ०, रेप० प्रोग० फिजि०, 1957, **20**, 516.
2. ठाकुर, के० पी०, **आक्टा० फिज० पोलोनिका**, 1975, **ए48**, 419.
3. सिंह, ए० के० तथा शर्मा, एम० एन०, **जर्न० फिजि० सोसा०** जापान, 1978, **44**, 191.

4. बार्न, एम० तथा लेन्डे, ए०, वर्हन्डी० डेन्ट०, **फिजि० गेस०**, 1918, **20**, 210.

5. बार्न, एम० तथा मेयर, जे० ई०, **जर्न० फिजि०**, 1932, **75**, 1.

6. वार्ष्णेय, वाई० पी० तथा शुक्ला, आर० सी०, **जर्न० केमि० फिजि०**, 1961, **35**, 582.

7. पटेल, एम० एम०, गोयल, वी० बी० तथा त्रिवेदी, एम० डी०, **इन्डि० जर्न० फिजि०**, 1967, **41**, 235.

8. पुरी, (कु०) उषा, **इन्डि० जर्न० प्योर एन्ड अप्ला० फिजि०**, 1977, **15**, 387.

9. कच्छावा, सी० एम० तथा सक्सेना, एस० सी०, **फिला० मैग०**, 1963, **8**, 1429.

10. माथुर, वी० के० तथा सिंह, एस० पी०, **फिला० मैग०**, 1967, **16**, 1299.

11. बैरट, एच० ए० तथा मण्डल, एम०, **फिजि० रिव्यू**, 1958, **109**, 1572.

12. मैसी, ए० जी०, The typical elements. Penguin England, 1972.

13. वार्किंग, एच० एस० तथा वेथज, के०, **जर्न० केमि० फिजि०**, 1973, **58**, 3244.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 4, October, 1980, Pages 345-347

टालब्यूटामाइड क्यूप्रिक क्लोराइड संकुल

एस० ए० इकबाल काजमी तथा आर० कौशल*

रसायन प्रयोगशाला, सैफिया कालेज, भोपाल

[प्राप्त–जनवरी, 10, 1980]

सारांश

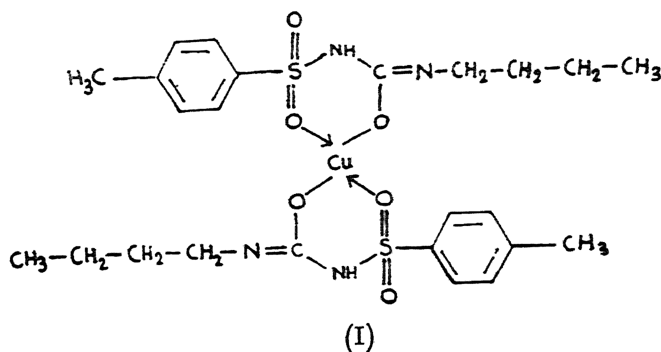
मधुमेह औषधियों में टालब्यूटामाइड क्यूप्रिक क्लोराइड के साथ एल्कोहॉलिक माध्यम में 2:1 संकुल वनाता है, जैसा कि चालकतामूलक अनुमापन तथा विश्लेषण आँकड़ों से ज्ञात होता है । संकुल को दी गई संरचना की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रमों द्वारा की गई ।

Abstract

Tolbutamide-cupric chloride complex. *By* S. A. Iqbal and R. Kaushal*, Chemical Laboratories, Saifia College, Bhopal.

Tolbutamide (Restinon), an oral antidiabetic agent, forms 2:1 complex with cupric chloride in alcoholic solutions as indicated by conductometric measurements and analytical data. Structure assigned to the complex is supported by I.R. spectr-ral bands.

टालब्यूटामाइड (I) [1–ब्यूटिल–3–(पैराटोलिल सल्फोनिल) यूरिया] एक महत्वपूर्ण हाइपो-ग्लायसेमिक पदार्थ है, जो यूरिया का द्विप्रतिस्थापित व्युत्पन्न है ।



(I)

*अवकाश प्राप्त प्राध्यापक, होल्कर साइंस कालेज, इन्दौर ।

इसका सल्फोनिल मूलक तथा कार्बोनिल मूलक का एनोलिक रूप संकुल बनाने में प्रयुक्त होता है।

संकुल का संयोजन

(अ) शुद्ध टालब्यूटामाइड 0·005M तथा क्यूप्रिक क्लोराइड 0.01M के मानक विलयन 80% शुद्ध एथेनाल में बनाये गये। यौगिक के 20 मिली मूल विलयन को 200 मिली तक तनु किया गया आयतन संशोधन के बाद चालकता तथा धात्विक आयतन के बीच ग्राफ खींचा गया जो 2:1 लिगैन्ड धातु संकुल की पुष्टि करता है।

(ब) जाब की संतत् विचरण विधि द्वारा स्पेक्ट्रमी अध्ययनों से भी 2:1 टालब्यूटामाइड-क्यूप्रिक क्लोराइड संकुल की पुष्टि होती है। यहाँ टर्नर-एन्डरसन विधि[1] का उपयोग किया गया था।

वियोजन तथा विश्लेषण

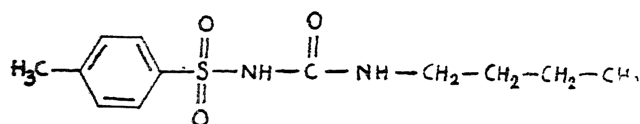
उदासीन किये गये टालब्यूटामाइड 1·48 ग्राम तथा क्युप्रिक क्लोराइड 0.42 ग्राम को न्यूनतम जलीय एल्कोहॉल में अलग-अलग घोला गया। लिगैंड विलयन को संतत विलोडन करते हुए मिलाया गया, फलस्वरूप तुरन्त हरा जिलेटिनी अवक्षेप प्राप्त हुआ जो ठंडा करने पर क्रिस्टली बन गया। प्राप्त संकुल को छानकर तथा एल्कोहॉल से धोकर शुद्ध किया गया। प्राप्ति 0.85 ग्राम। संकुल 133° से० पर अपघटित हो जाता है।

कॉपर का विश्लेषण आयडोमिति द्वारा किया गया। नाइट्रोजन का विश्लेषण जेल्डाल विधि द्वारा किया गया जिसमें नवीन आपरिवर्तित पाचन मिश्रण [2,3] प्रयोग में लाया गया।

संकुल में Cu 10.91%,तथा N 9.17% उपस्थित है जबकि $(C_{12}H_{17}N_2O_3S)_2Cu$ में सिद्धान्ततः Cu 10.55% तथा N9.31% उपस्थित होना चाहिए।

विवेचना

उपरोक्त परिणामों के आधार पर टालब्यूटामाइड कॉपर संकुल 2:1 को संरचना (II) द्वारा निरूपित किया जा सकता है जो पूर्व में किये गये कार्य [4-7] से मेल खाती है।



(II)

संकुल (II) ने क्लोराइड आयन का परीक्षण नहीं दिया। संरचना(II) की पुष्टि अवरक्त स्पेक्ट्रम द्वारा भी की गई। यहाँ SO_2-NH मूलक का अवशोषण बैंड 3080± 40 cm⁻¹ पर तथा >C=N —R मूलक का अवशोषण बैन्ड 1685± 5 cm⁻¹ पर प्राप्त हुआ। C–O प्रतान (Stretch) 1660± 10 cm⁻¹ तथा 1105±5 cm⁻¹ पर प्राप्त हुई।

संकुल का स्थायित्व (Log K) 4·3, तदनुसार मुक्त ऊर्जा परिवर्तन ($\triangle F$) -5.9 किलोकैलोरी प्रतिमोल ज्ञात किया गया।

कृतज्ञता-ज्ञापन

प्रथम लेखक शोधकार्य में आर्थिक सहायता हेतु यू०जी०सी० नई दिल्ली का आभारी है। साथ ही लेखक शोधकार्य में सुविधायें प्रदान करने के लिये सैफिया कालेज के प्राचार्य एवं प्राध्यापक एल०एच० खान के भी आभारी हैं।

निर्देश

1. टर्नर, एस०ई० तथा एन्डरसन, आर० सी०, **जर्न० अमर० केमि० सोसा०**, 1949, **71**, 912
2. स्काट "Standard Methods of Chemical Analysis" **वान नारस्टैंड,** 1960, पृष्ठ 634
3. मोहम्मद अशरफ़, **टेलेन्टा**, 1968, **15**, 559
4. कौशल, आर० तथा इकबाल काज़मी, एस० ए०, **जर्न० साइन्टिफिक रिसर्च** 1978, **11**, 4-6
5. वांग, क्यू ली, **जे० फार्म० सोसा० (कोरिया)**, 1962,**71**, 13
6. पान्डे, के० के० तथा कौशल, आर०, **इन्डि० जर्न० अप्ला० केमि०**, 1966, **32**, 94
7. चतुर्वेदी, के० के० तथा कौशल, आर०, **रिसर्च जर्न० इन्दौर विश्वविद्यालय**, 1973, 2, 49

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 4, October, 1980, Pages 349-354

फ्लाइऐश तथा वोलैस्टोनाइट द्वारा ऑक्सैलिक अम्ल अधिशोषण

कमल के० जैन, गुर प्रसाद तथा वी० एन० सिंह

अनुप्रयुक्त रसायन अनुभाग,
इन्स्टिट्यूट ऑफ टेक्नॉलोजी, बनारस हिन्दू यूनिवर्सिटी, वाराणसी

[प्राप्त—जुलाई 27, 1979]

सारांश

सक्रियित कार्बन संसाधन (treatment) में निहित अधिक व्यय को देखते हुये, कई औद्योगिक अपशिष्टों में उपस्थित आक्सैलिक अम्ल निष्कासन के लिये अप्रचलित पदार्थ, जैसे फ्लाइऐश तथा वोलैस्टोनाइट के प्रयोग की सम्भाव्यता का अन्वेषण किया गया है। अधिशोषण फ्रायण्डलिक आइसोथर्म का समर्थन करता है। ताप के प्रभाव का अध्ययन किया गया है और अधिशोषण की समविन्यासी उष्माओं की गणना की गई है। दोनों ही निकाय (system) प्रथम कोटि की बलगतिकी का अनुसरण करते हैं।

Abstract

Oxalic acid adsorption by flyash & wollastonite. *By* Kamal K. Jain, Gur Prasad and V. N. Singh. Applied Chemistry Section, Institute of Technology, Banaras Hindu University, Varanasi.

The feasibily of using unconventional materials like flyash and wollastonite for the removal of oxalic acid, which is present in several industrial wastes, has been investigated in view of the high cost involved in activated carbon treatment. The effect of temperature has been studied and the isosteric heats of adsorption calculated. Both the systems follow a first order kinetics.

औद्योगिक अपशिष्टों में कई प्रकार के अवांछित प्रदूषक होते हैं जिन्हें बिना उचित पूर्व-संसाधन के नदियों में छोड़ दिया जाता है। फलस्वरूप पानी लगातार खराब होता चला जाता है। चूँकि पृथ्वी पर जल के स्रोत सीमित हैं, अत: यह समस्या पर्यावरण-वैज्ञानिकों के लिये विशेष ध्यान देने की है और इस प्रकार विभिन्न उद्योगों से निकलने वाले अपशिष्टों के संसाधन की आवश्यकता पड़ती है। अपशिष्ट-संसाधन

के लिये प्रचलित प्रक्रमों में मितव्ययी तथा विकाससील देशों के लिये अधिशोषण सर्वाधिक उपयुक्त प्रतीत होता है।

प्रस्तुत अध्ययन में, प्रचलित तथा मँहगे सक्रियित कार्बन को सापेक्षत: सस्ते अधिशोषक फ्लाइऐश तथा वोलैस्टोनाइट द्वारा प्रतिस्थापित करने का प्रयास किया गया है। तापीय बिजली संयंत्रों से प्राप्त अपशिष्ट के रूप में फ्लाइऐश के निस्तारण (disposal) की विकट समस्या आती है जबकि वोलैस्टोनाइट राजस्थान में प्रचुर मात्रा में पाया जाता है। प्रस्तुत अध्ययनों को आक्सैलिक अम्ल के निष्कासन तक ही सीमित रखा गया है जो काष्ठ-लुगदी उत्पादन[1] शर्करा शोधन[2] तथा जैतून के तेल-शोधन[3] आदि से प्राप्त अपशिष्टों का एक अवयव है। यह घरेलू वाहितमल में भी पाया जाता है[4]। जलीय पर्यावरण में इसकी एक निश्चित क्रान्तिक सान्द्रता मछलियों के जीवन के लिये घातक पई गई हैं[5]।

प्रयोगात्मक

फ्लाइऐश का नमूना, इन्स्टिट्यूट ऑफ टेक्नॉलोजी, बनारस यूनिवर्सिटी के बॉयलर संयंत्र से लिया गया था जबकि वोलैस्टेनाइट का नमूना मेसर्स वॉल्केम प्राइवेट लिमिटेड उदयपुर ने प्रदान किया। मुक्त क्षार को निकालने के लिए फ्लाइऐश के नमूने को पानी से धोया गया और वोलैस्टोनाइट को उसी रूप में प्रयोग किया गया। प्रस्तुत अध्ययन में प्रयुक्त नमूने का माध्य कण व्यास 49 माइक्रॉन था। इन अधिशोषकों का रासायनिक संघटन सारणी 1 में दिया गया है।

अधिशोषकों (फ्लाइऐश तथा वोलेस्टोनाइट) के 1·0 ग्राम को डाटदार पॉलीथीन बोतलों में वांछित सान्द्रता वाले (0·1M से 0·01M) आक्सैलिक अम्ल विलयन के निश्चित आयतन (आक्सैलिक अम्ल फ्लाइऐश निकाय के लिये 50 ml तथा आक्सैलिक अम्ल/वोलैस्टोनाइट निकाय के लिये 100 ml) में मिलाया गया और पूर्व-समंजित ताप (25, 35 तथा 45°C) पर लाया गया। साम्यावस्था काल के पश्चात्, अधिपृष्ठ द्रव में आक्सैलिक अम्ल की मात्रा अनुमापनी विधि द्वारा आकलित की गई और फ्रायण्डलिक आइसोथर्म

$$\log x/m = \log k_F + \frac{1}{n} \log c$$

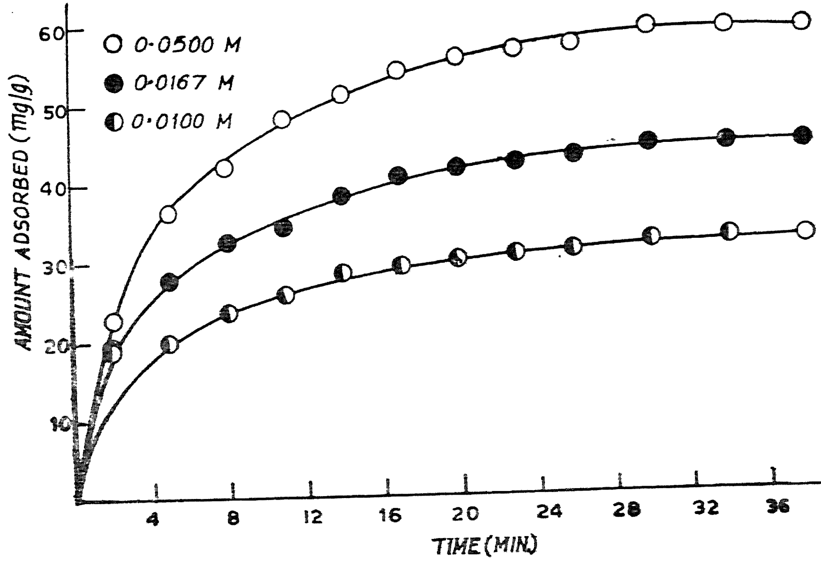
की वैधता की जाँच 3 तापों पर की गई और आलेखीय रूप से फ्रायण्डलिक स्थिरांकों k_F तथा $1/n$ के मानों की गणना की गई।

गतिज अध्ययन भी 25±0·5°C पर किये गये। सभी प्रकरणों में अधिशोषक रहित नियंत्रण भी चलाये गये।

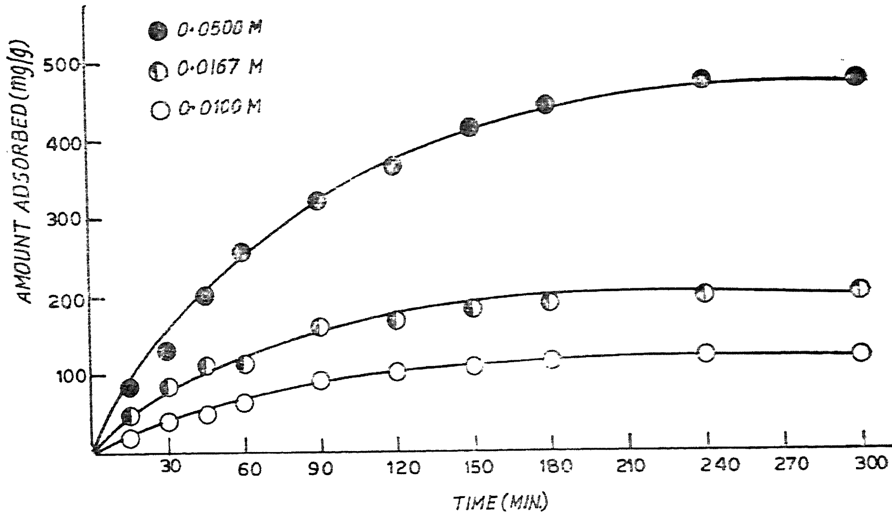
परिणाम तथा विवेचना

चित्र 1 एवं 2 में विभिन्न तापों के अन्तराल पर क्रमश: फ्लाइऐश तथा वोलैस्टोनाइट द्वारा निष्कासित आक्सैलिक अम्ल की मात्रा प्रदर्शित की गई है। इन आलेखों से यह स्पष्ट हो जाता है कि फ्लाइऐश के लिये

साम्यकाल काफी कम (30 मिनट) है जबकि वोलैस्टोनाइट की साम्यावस्था 240 मिनट में स्थापित होती है।



चित्र 1 विभिन्न समयान्तरालों पर फ्लाइऐश द्वारा आक्सैलिक अम्ल का विलगन

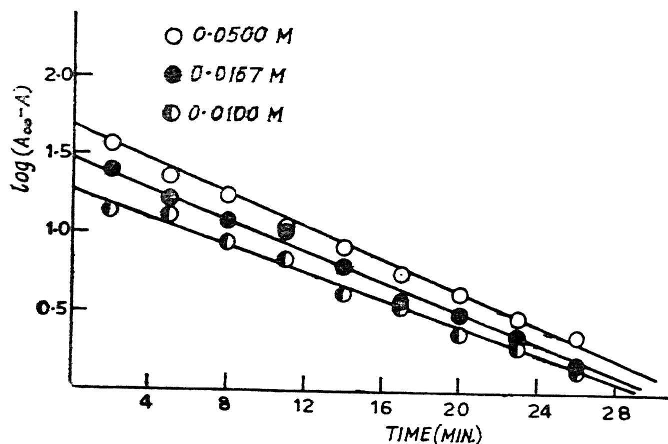


चित्र 2 विभिन्न समयान्तरालों पर वोलैस्टोनाइट द्वारा आक्सैलिक अम्ल का विलयन

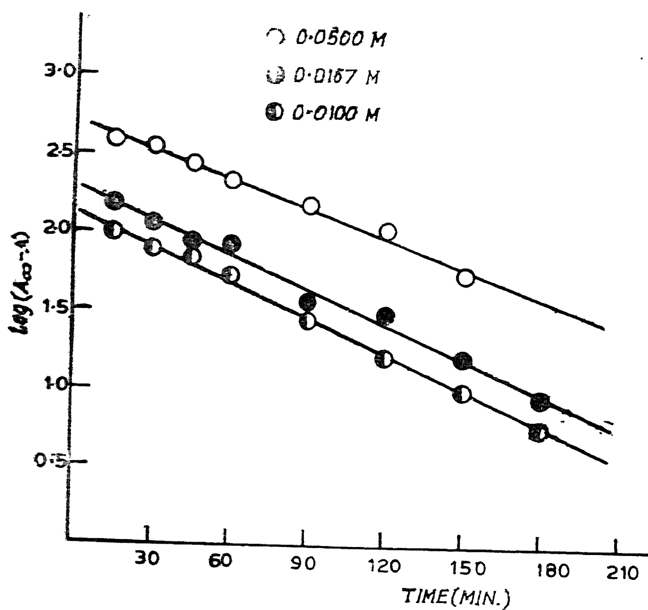
लांग्रेन समीकरण[6]

$$\log (A_\alpha - A) = \log A_\alpha - \frac{k}{2 \cdot 303} t$$

अनुप्रयोज्य पाया जाता है, जहाँ A साम्यावस्था पर अधिशोषित मात्रा है और A समय t (मिनट) पर अधिशोषित मात्रा (mg/g) है इसलिये ये दोनों निकाय प्रथम कोटि की बलगतिकी का अनुसरण करते हैं (चित्र 3 तथा 4)।



चित्र 3 आक्सैलिक अम्ल/फ्लाइऐश तंत्र की प्रथम कोटिक गतिकी



चित्र 4 आक्सैलिक अम्ल/वोलैस्टोनाइट तंत्र की प्रथम कोटिक गतिकी

सान्द्रता के 0·1M से 0·01M के परिसर में दोनों निकायों के लिये फ्रायण्डलिक समीकरण वैध पाया गया। इन आलेखों से फ्रायण्डलिक प्राचल k_F तथा 1/n, जो क्रमश: अधिशोषकों की अधिशोषण क्षमता

तथा तीव्रता के सूचक हैं, की गणना की गई और इन्हें सारणी 2 में दिया गया है। ताप के बढ़ने से अधिशोषण क्षमता तथा तीव्रता दोनों को ही कम होता पाया गया है।

फ्रायण्डलिक आइसोथर्म स्वयं भौतिक तथा रासायनिक अधिशोषण में भिन्नता करने की कोई कसौटी प्रदान नहीं करता है, फिर भी, अधिशोषण उष्माओं के ज्ञान से अधिशोषण की प्रकृति के बारे में एक मानसिक रूपरेखा प्राप्त होती है। अधिशोषण की समविन्यासी उष्माओं (Isosteric heats) की गणना log c बनाम 1/T के आलेख के ढलानों (slope) से की गई। प्राप्त मानों को सारणी 3 में दिया गया है। अक्सैलिक अम्ल/फ्लाइऐश निकायों के लिये अधिशोषण उष्मायें ऋणात्मक होती हैं जिससे प्रदर्शित होता है कि यह प्रक्रम उष्माक्षेपी है और ताप के बढ़ने से इस पर अनुकूल प्रभाव नहीं पड़ता है जबकि दूसरे निकाय के लिये इसका विपरीत सही है।

सारणी 1

फ्लाइऐश तथा वोलैस्टोनाइट का रासायनिक संघटन

अवयव	फ्लाइऐश %	वोलैस्टोनाइट %
SiO_2	55-84	45–51
Al_2O_3	24·96	Max. 0·5
Pe_2O_3	1·87	Max. 0·5
CaO	3·25	46–50
MgO	1·38	–
MnO	–	Max. 0·05
दहनोपरान्त क्षति	10·00	1·5–3·0

सारणी 2

फ्रायण्डलिक प्राचल

ताप °C	आक्सैलिक अम्ल/फ्लाइऐश तंत्र k_F	1/n	आक्सैलिक अम्ल/वोलैस्टोनाइट तंत्र k_F	1/n
25	$12{\cdot}0200 \times 10^{-4}$	0·2857	0·0280543	0·5000
35	$7{\cdot}8523 \times 10^{-4}$	0·2078	0·0251188	0·4364
45	$4{\cdot}8417 \times 10^{-4}$	0·1311	0·0229086	0·3962

सारणी 3

अधिशोषण की समविन्यासी उष्माएँ

प्रारम्भिक सान्द्रता मोल/लि०	समविन्यासी उष्माएँ आक्सैलिक अम्ल/फ्लाईऐश	किलोकैलोरी आक्सैलिक अम्ल/वोलैस्टोनाइट
0·1000	−0·105	0·125
0·0500	−0·172	0·328
0·0250	−0·259	0·921
0·0167	−0·357	0·962
0·0125	−0·227	1·666
0.0100	−0·238	2·051

निर्देश

1. एलरिज, ई०, Trans. 2nd Seminar on biological problems on water pollution, R. A. Taft Sanitary Engineering Centor, Teh. Rept. 1959, **w60-3** 255
2. लेक्लर्क, ई० तथा एडेलीन, एफ०, Centre Belge'etude Document. Eaux 1960, 11.4-**115**, 201
3. यूरसिनास, जे०, Grasasy nceites, 1959, **10**, 30
4. स्पेक्टर, डब्लू०, Handbook of Biological Data, W. B. Saunders Co. Philadelphia, Pa. 1959
5. एलिस, एम० एस०, Bull. U. S. Bar. Fish., 1937, **48,** No. 22, 365-437
6. लांग्रेन, एस० S. Bil. K. Svenska Vetenskapsakad. Hindi. **24**, 1898

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 4, October, 1980, Pages 355-359

अष्टि रूप में सार्वीकृत बेटमैन फलन वाला संवलन समाकल समीकरण

एल० ए० दीक्षित
गणित विभाग, शासकीय इंजीनियरी तथा प्रौद्योगिकी महाविद्यालय, रायपुर

[प्राप्त—मई 10, 1978]

सारांश

समाकल समीकरण के लिये जिसमें सार्वीकृत वेटमैन फलन $K_n^{\mu,\nu}(x)$ निहित है एक प्रतिलोमन सामकल प्राप्त किया गया है।

Abstract

On a convolution integral equation involving generalised Bateman function $K_n^{\mu,\nu}(x)$, as its kernel. *By* L. A. Dixit, Department of Mathematics, Government College of Engineering & Technology, Raipur.

An inversion integral for the integral equation, involving generalised Bateman function, $K_n^{\mu,\nu}(x)$, has been obtained.

1. प्रस्तावना

गत कुछ वर्षों में सक्रियात्मक फलन की विधियों का उपयोग करते हुये संवलन प्रकार के समाकल समीकरण का अध्ययन अनेक कार्यकर्ताओं ने किया है। भारतीय[1] तथा जोशी[5] ने सार्वीकृत बेटमैन फलन $K_n^l(x)$ वाले एक समाकल समीकरण के लिये प्रतिलोमन की स्थापना की है। उसी अष्टि के साथा जोशी[6] ने रोड्रिग सूत्र का उपयोग करते हुये समाकल समीकरण का हल प्रस्तुत किया है।

प्रस्तुत प्रपत्र में सार्वीकृत बेटमैन फलन वाले समाकल समीकरण का प्रतिलोमन दिया गया है। जो विधि प्रयुक्त की गई है वह विडर[8] की है।

श्रीवास्तव[7] द्वारा परिभाषित सार्वीकृत बेटमैन फलन $K_n^{\mu,\nu}(x)$

$$K_n^{\mu,\nu}(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/2} \sin^{\mu}\theta \cos^{\nu}\theta \cos[x \tan\theta-n\theta]\, d\theta \tag{2.1}$$

है जहाँ n, μ तथा ν अनृण पूर्ण संख्याएँ हैं।

यह देखा जा सकता है कि

$$K_n^{0,\nu}(x)=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\nu} K_n^{\nu}(x),$$

तथा परिणाम जिनमें $K_n^{\mu,\nu}(x)$ सन्निहित है ऐसे परिणाम देता है जिनमें $\mu=0$ रखने पर $K_n^{\nu}(x)$ सन्निहित हो, यदि $\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\nu} K_n^{0,\nu}(x)$ को $K_n^{\nu}(x)$ के रूप में लिया जाता है।

$f(t)$ के लैप्लास परिवर्त को

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t)dt=\mathrm{F}(p),\ Re(p)>0$$

के द्वारा परिभाषित किया जाता है और सांकेतिक रूप में

$$f(t)\doteqdot F(p)$$

द्वारा व्यक्त किया जावेगा।

एर्डेल्यी [(4), pp. 129, 130, 131, 215] के निम्नलिखित परिणाम ज्ञात हैं :

$$f^n(t)\doteqdot p^nF(p)-p^{n-1}f(0)-p^{n-2}f^1(0)\ldots\ldots f^{n-1}(0). \tag{2.2}$$

$$\int_0^t\cdots\int_0^t f(t)(dt)^n\doteqdot p^{-n}F(p). \tag{2.3}$$

$$\int_0^t f_1(u).\,f_2(t-u)du\doteqdot F_1(p).F_2(p). \tag{2.4}$$

जहाँ $f_1(t)\doteqdot F_1(p)$ तथा $f_2(t)\doteqdot F_2(p)$.

$$t^{\mu-1/2}M_{k,\mu}(2at)\doteqdot(2a)^{\mu+1/2}\surd((2\mu+1)).\ \frac{(p-a)^{k-\mu-1/2}}{(p+a)^{k+\mu+1/2}}. \tag{2.5}$$

क्योंकि $(\mu)>-\frac{1}{2}$.

श्रीवास्तव[7] द्वारा प्राप्त $K_n^{\mu,\nu}(x)$ का चिरप्रतिष्ठित लैप्लास परिवर्त (2.6) द्वारा दिया जाता है

$$K_{2n}^{2m,2l}(x) \doteqdot 2(-1)^m p^{2m}(1-p)^{n-l-m-1}(1+p)^{-(n+l+m+1)} \tag{2.6}$$

बशर्ते कि

(i) Re (p)>0,

(ii) (n−1) घन पूर्णांक है तथा

(iii) (n−1−m−1)>0.

3. प्रमेय

यदि

(i) λ, l, m तथा n धनात्मक पूर्ण संख्याएँ हैं

(ii) λ−m−2l−2>0,

(iii) $f^k(0)=0$, क्योंकि $k=0, 1, 2, \ldots (\lambda+m+1)$.

तो समाकल समीकरण

$$\int_0^x K_{2n}^{2m,2l}[a(x-t)]g(t)dt=f(x) \tag{3.1}$$

का हल

$$g(t)=A\int_0^t\left[\int_0^{t-x}\frac{(t-x-u^2)^{m-1}}{(2m-1)!}u^{\lambda/2-l-m/2-2}\times M_{\lambda/2-n+m/2,\lambda/2-l-m/2-3/2}(2au)\right](D+a)^{\lambda+m}f(x)dx \tag{3.2}$$

होगा जहाँ

$$A = \frac{(-1)^{n-l-1}}{2^{\lambda/2-l-m/2}.a^{\lambda/2+l-m/2}\surd((\lambda-m-2l-2))}. \tag{3.3}$$

उपपत्ति

माना $f(t)\doteqdot F(p)$ तथा $g(t)\doteqdot G(p)$

(3.1) का लैप्लास परिवर्त लेने और (2.4) के प्रकाश में (2.6) को व्यवहृत करने पर हमें

$$(Gp)=\frac{(-1)^{n-l-1}p^{-2m}(p-a)^{l+m-n+1}F(p)}{2a^{2l+1}(p+a)^{-(n+l+m+1)}}. \tag{3.4}$$

प्राप्त होता है जिसे निम्न रूप में पुनः लिखा जा सकता है

$$G(p)=\frac{(-1)^{n-l-1}p^{-2m}(p-a)^{(\lambda/2-n+m/2)-(\lambda/2-l-m/2-3/2)-1/2}(p+a)^{\lambda+m}F(p)}{2a^{2l+1}(p+a)^{(\lambda/2-n+m/2)+(\lambda/2-l-m/2-3/2)+1/2}}. \tag{3.5}$$

बर्ग [(2) p 65, (14.6)] से हमें प्राप्त है

$$\int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} f(u)\, du = \int_0^t \cdots \int_0^u \int_0^u \cdots f(u)(du). \tag{3.6}$$

क्योंकि $n \geqslant 1$.

अब हम (2.3) तथा (2.4) से सफलतापूर्वक व्युत्पन्न कर सकते हैं कि

$$\int_0^t \frac{(t-u)^{n-1}}{(n-1)!} \phi(u) du \doteqdot p^{-n} \phi(p) \tag{3.7}$$

फलतः समीकरण (2.5) तथा (3.7) से

$$\int_0^t \frac{(t-u)^{2m-1}}{(2m-1)!} u^{\lambda/2-l-m/2-2} M_{\lambda/2-n+m/2, \lambda/2-l-m/2-3/2} (2au)\, du \tag{3.8}$$

$$\doteqdot p^{-2m} (2a)^{\lambda/2-l-m/2-1} \cdot \surd((\lambda-m-2l-2)) \cdot \frac{(p-a)^{l+m-n+1}}{(p+a)^{\lambda-n-l-1}}.$$

प्राप्त होता है।

अन्त में (2.4) तथा (3.8) के प्रकाश में (3.5) के लैप्लास प्रतिलोमन से वांछित फल (3.2) प्राप्त होता है।

4. हल (3.2) को निम्नलिखित रूप में भी लिखा जा सकता है

$$g(t) = A \int_0^t \left[\int_0^{t-x} \cdots \int_0^u \int_0^u \cdots u^{\lambda/2-l-m/2-2} \times \right. \tag{4.1}$$

$$\left. M_{\lambda/2-n+m/2, \lambda/2-l-m/2-3/2} (2au)\, du \right] \overline{(D+a)^{\lambda+m} f(x) dx}$$

अब m=0, रखने पर समीकरण (3.1) तथा उसका हल (4.1) क्रमशः निम्नलिखित में समानीत हो जाते हैं

$$\int_0^x K_{2n}^{2l} [a(x-t)] g(t) dt = f(x) \tag{4.2}$$

तथा

$$g(t) = A_1 \int_0^t (t-x)^{\lambda/2-l-2} M_{\lambda/2-n, \lambda/2-l-3/2} [2a(t-x)] (D+a)^{\lambda} f(x) dx \tag{4.3}$$

जहाँ

$$A_1 = \frac{(-1)^{l-n+1}}{2^{\lambda/2-l} a^{\lambda/2+l} \surd((\lambda-2l-2))}.$$

तथा $K_{2n}^{2l}(x)$ चक्रवर्ती[3] द्वारा परिभाषित सार्वीकृत बेटमैन फलन है।

परिणाम (4.3) जोशी[5] के परिणाम से मेल खाता है यदि सन्निहित प्राचलों का विशिष्टीकरण कर दिया जाय।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक डा० रत्न सिंह का आभारी है जिन्होंने इस शोध-पत्र की अवधि में पथ प्रदर्शन किया ।

निर्देश

1. भारतीय, पी० एल०, **जर्न० इण्डियन मैथ० सोसा०**, 1964, **28**, 163
2. बर्ग, एल०, Introduction to the Operational Calculus. North Holland Pub. Co. Amsterdam 1967, पृष्ठ 65
3. चक्रवर्ती, एन० के०, Kon. Acad. Wet. Proc. Ser. A, 1952, **55** (**1**) Indag. Math. **14** (1), 63
4. एर्डेल्यी, ए०, Tables of Integral Transforms, भाग 1, मैकग्राहिल, न्यूयार्क
5. जोशी, बी० के०, **इण्डियन जर्न० प्योर एप्ला० मैथ०** (स्वीकृत)
6. वही, The Math. Student, 1974, XL II, 183
7. श्रीवास्तव, टी० एन०, **बुले० कलकत्ता मैथ० सोसा०**, 1974, **66**, 185-192
8. विडर, डी० वी०, **अमे० मैथ० मंथली**, 1963, **70**, 291

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 4, October, 1980, Pages 361-363

L-ग्लूटैमिक तथा L-ऐस्पार्टिक अम्लों के सूक्ष्म आकलन के लिए एक नये अनुमापक के रूप में सोडियम-β-ग्लिसरोफॉस्फेट

अरुण कुमार सक्सेना
रसायन विभाग, पो० ऑ० बॉक्स 35061
दारेसलम विश्वविद्यालय, दारेसलम, तन्जानिया

[प्राप्त–मई 30, 1980]

सारांश

सूचक के रूप में ब्रोमोक्रीसॉल पर्पिल को प्रयोग करते हुए, 0.735 से 0.07 मिग्रा तक के परिसर की सूक्ष्ममात्राओं में L- ग्लूटैमिक तथा L-ऐस्पार्टिक अम्लों का सोडियम -β-ग्लिसरोफॉस्फेट के साथ सफलता-पूर्वक आकलन किया गया है।

Abstract

Sodium B-glycerophosphate as a new titrant for the microdetermination of L-glutamic and L-aspartic acids. *By* Arun Kumar Saxsena, Chemistry Department, P. O. Box 35061, University of Dar es Salaam, Dar es Salaam, Tanzania.

L-glutamic and L-aspartic acids have been successfully estimated in microamounts, i.e. range of 0.735 mg to 0.067 mg with sodium β-gycerophosphate using bromocresol purple as an indiator.

साहित्य में L-ग्लूटैमिक तथा L-ऐस्पार्टिक अम्लों के अनुमापनी आकलन से संबंधित अनेक शोधपत्र-प्रकाशित हो चुके हैं [1]। प्रस्तुत संक्षिप्त नोट एक नवीन तथा कम समय लेने वाली विधि का वर्णन करता है जिससे जलीय माध्यम में कमरे के ताप पर इन अम्लों का सूक्ष्म मात्राओं के आकलन एक नये अनुमापक सोडियम-β- ग्लिसरोफॉस्फेट [2] द्वारा किया जा सकता है। इन आकलनों में सूचक के रूप में ब्रोमोक्रीसॉल पर्पिल का 0.0053% जलीय विलयन प्रयोग किया जाता है। यहाँ इन ऐमीनो अम्लों का केवल एक ही कार्बोक्सिल समूह अनुमापक से अभिक्रिया करता है। इस विधि द्वारा व्यक्तिगत अम्लों का आकलन बहुत ही यथार्थता से किया जा सकता है परन्तु अनुमापन इनके द्विअंगी मिश्रण तथा किसी अन्य अम्ल अथवा क्षार की उपस्थिति में इनके व्यक्तिकरण के कारण संभव नहीं है। इसके अतिरिक्त इस विधि से उपर्युक्त ऐमीनो अम्लों के D-प्ररूपों का भी आकलन किया जा सकता है।

प्रयोगात्मक

प्रयुक्त अभिकर्मक: ऐस्पार्टिक अम्ल (ई. मर्क), ग्लूटैमिक अम्ल, सोडियम-β-ग्लिसरोफॉस्फेट तथा ब्रोमोक्रीसॉल पर्पिल (सभी बी० डी० एच०, इंगलैण्ड)। ऐस्पार्टिक तथा ग्लूटैमिक अम्ल और सोडियम-β-ग्लिसरोफॉस्फेट विलयन प्रचलित विधियों द्वारा मानकीकृत किये गये।

दोबार आसुत जल (ताजा, जिसने सूचक के साथ पीला रंग दिया) के 100 मिली में 0.0053 ग्राम ब्रोमोक्रीसॉल पर्पिल घोला गया।

उपर्युक्त अम्लों के ज्ञात मानक विलयन बीकर में अलग-अलग लिये जाते हैं और उनका आयतन 25 मिली० कर लिया जाता है। इसमें दो एक बूँद ब्रोमोक्रीसॉल पर्पिल की डाली जाती है। उपरोक्त विलयन को सोडियम -β- ग्लिसरोफॉस्फेट के मानक विलयन के साथ लगातार हिलाते हुए अनुमापित किया जाता है। अंतबिन्दु पीले से हल्के गुलाबी (पर्पिल) रंग परिवर्तन से लिया जाता है।

परिणाम सारणी 1 तथा 2 में दिये गये हैं और इन अम्लों को 0.735 मिग्रा० से 0.067 मिग्रा० के परिसर में आकलित किया जाता है।

सारणी 1

L —ग्लूटैमिक अम्ल का सूक्ष्माकलन

विलयन का आयतन, मिली०		L—ग्लूटैमिक अम्ल, मिग्रा०		
ग्लूटैमिक अम्ल की मात्रा 0.001 M	प्रयुक्त सोडियम-β-ग्लिसरोफॉस्फेट 0.001 M	प्राप्त	सैद्धान्तिक मान	त्रुटि
	5.02	0.738	0.735	+0.003
5.00	5.00	0.735	0.735	0.000
	5.02	0.738	0.735	+0.003
	2.02	0.297	0.294	+0.003
2.00	2.04	0.300	0.294	+0.006
	1.08	0.290	0.294	−0.004
	0.96	0.141	0.147	−0.006
1.00	1.00	0.147	0.147	0.000
	1.00	0.147	0.147	0.000
	0.50	0.074	0.074	0.000
0.50	0.52	0.076	0.074	+0.002
	0.48	0.071	0.074	−0.003

सारणी 2

L –ऐस्पार्टिक अम्ल का सूक्ष्माकलन

विलयन का आयतन, मिली०		ऐस्पार्टिक अम्ल, मिग्रा०		
ऐस्पार्टिक अम्ल की मात्रा 000·M	प्रयुक्त β-ग्लिसरो फास्फेट 0001 M	प्राप्त	सैद्धान्तिक मान	त्रुटि
	5.04	0.671	0.666	+0.005
5.00	5.00	0.666	0.666	0.000
	5.00	0.666	0.666	0-000
	2.00	0.266	0.266	0.000
2.00	2·02	0.263	0.266	−0.003
	2.00	0.266	0.266	0.000
	1.00	0.133	0.133	0.000
1.00	0.94	0.125	0.133	−0.008
	1.00	0.133	0.133	0.000
	0.48	0.064	6.067	+0.003
0.50	0.50	0.067	0.067	0.000
	0.50	0.067	0.067	0.000

निर्देश

1. (i) सक्सेना, ए० के०, **केमि० एनल० (पेरिस)** 1971, **53**, (12) 757.

(ii) वही, **माइक्रोकेमि० जर्न०** (यू० एस० ए०), 1972, **17**, (1), 75.

(iii) वही, **इजिप्ट जर्न० केमि०** (यू० ए० आर०), 1973, **15**, 179.

(vi) वही, **इंडि० जर्न० केमि०**, 1976, **14**(A) No. 7, 544.

(v) वही, **द फारमोसन साइंस**, 1976 **30**, No. 4, 160.

2. (i) विल, ई० एल० तथा स्टीवर्ड एफ० एन, **ड्रग स्टैण्डर्ड**, 1952, **20**, 26.

(ii) बेकेर, ए० एच०, कैम्प, आर० एम० तथा मार्टिन, एच० डब्ल्यू०, **जर्न० फोर्म फार्माकोल**, 1957,**4**, 399.

(iii) कार्स्टेन, पा०, कीथ, एच० एल० तथा हुग, पी० डे०, Rec. Trow, Chem, 1960, **79**, 610.

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 4, October, 1980, Pages 365-374

इलाहाबाद मण्डल की जलोढ मृदाओं में उपलब्ध फास्फोरस की मात्रा

शिवगोपाल मिश्र तथा सरजू प्रसाद पाठक
कृषि रसायन शाखा, रसायन विभाग, इलाहाबाद विश्वविद्यालय

[प्राप्त—अक्टूबर 1, 1979]

सारांश

प्रस्तुत अध्ययन इलाहाबाद मण्डल के 2,08,972 मृदा नमूनों (1976-77 से 1978-79) के विश्लेषित परिणामों के आधार पर प्रत्येक विकास खण्ड को एक इकाई मानकर पोषक तत्व सूचकांक की गणना की गई जिससे स्पष्ट है कि फतेहपुर एवं इटावा जनपद की मृदायें उपलब्ध फास्फोरस में न्यून हैं तथा इन जनपदों में किसी भी विकास खण्ड का फास्फोरस स्तर मध्यम नहीं रहा। इलाहाबाद जनपद में केवल दो विकास खण्डों को छोड़कर, जिनका स्तर मध्यम पाया गया, सभी विकास खण्डों की मृदाओं का स्तर न्यून है। फर्रुखाबाद जनपद के लगभग 50 प्रतिशत विकास खण्ड मध्यम फास्फोरस स्तर के एवं शेष मध्यम-उच्च फास्फोरस स्तर के पाये गये। कानपुर जनपद की भी 50 प्रतिशत मृदायें मध्यम एवं शेष न्यून आंशिक मध्यम फास्फोरस स्तर की पाई गईं। सम्पूर्ण इलाहाबाद मण्डल के 88 विकास खण्डों के अध्ययन से ज्ञात हुआ कि इनमें से 73.9 प्रतिशत विकास खण्ड न्यून फास्फोरस स्तर के, 25·0 प्रतिशत मध्यम फास्फोरस स्तर के एवं केवल 1·1 प्रतिशत विकास खण्ड उच्च फास्फोरस स्तर के अन्तर्गत आते हैं। अतः मण्डल के लगभग 75 प्रतिशत विकास खण्डों में अच्छी उपज प्राप्त करने हेतु फास्फोरस का प्रयोग करना आवश्यक है।

Abstract

Phosphorus status of soils of Allahabad Divison. *By* S.G. Misra and S.P. Pathak,* Agricultural Chemistry Section, Department of Chemistry, University of Allahabad.

The present compilation is based on 2,08,972 tests (1976-77 to 1978-79) on available phosphorus status of soils of Allahabad Division. The information in respect of the nutrient index values of a block taken as the unit of depicting the fertility class has

Present address-Asstt. Director, Soil testing, Agra, U. P.

been based on the soil test data of several thousands of surface samples of individual blocks, only in a few cases the number of samples tested was somewhat less.

The soils of Fatehpur and Etawah districts were found deficient in available P and no block was found in medium fertility category. In Allahabad too, all the blocks have been found deficient excepting two blocks where available P was found medium. Contrary to the above findings, about 50% of the blocks of Farrukhabad were found in medium category and remaining in medium-high in available P content. The soils of about 50% blocks of Kapnur were found medium in available P and the remaining were grouped in low or marginal medium fertility category. Considering the overall assessment of Allahabad Division, about 73·9% of the blocks are in low category, 25·0 percent in medium fertility class and only 1·1% of the 88 blocks have indicated a high available phosphorus level. Thus there is need for phosphorus application for ensuring proper crop growth in nearly 75% of the blocks in the Division. Even where the feritlity class happens to be in the medium category, it does not reflect adequacy of this nutrient.

कृषि विभाग उत्तर प्रदेश ने अभी हाल में ही मृदा परीक्षण पर आधारित उत्तर प्रदेश की विभिन्न मृदाओं के उर्वरता स्तर की विस्तृत समालोचना की है जिससे विदित हुआ है कि प्रदेश के 56 जनपदों में से लगभग 66 प्रतिशत जनपदों की मृदाओं में फास्फोरस स्तर न्यून, 25 प्रतिशत जनपदों में मध्यम एवं केवल 9 प्रतिशत जनपदों की मृदाओं में मध्यम-उच्च है। पहाड़ी क्षेत्र के केवल 5 जनपद पौडी, चमोली, टेहरी, उत्तरकाशी एवं देहरादून की मृदाओं का फास्फोरस स्तर उच्च पाया गया। [1]

स्पष्ट है कि प्रदेश के लगभग दो तिहाई जनपदों में फसलों की समुचित वृद्धि एवं उत्पादन हेतु फास्फ़ोरस डालना अति आवश्यक है। इसके साथ ही उन जनपदों में भी जहाँ की मृदायें मध्यम स्तर की हैं, फास्फोरस स्तर बनाये रखने एवं अच्छा उत्पादन लेने हेतु फास्फोरस डालना आश्वयक है। प्रस्तुत अध्ययन में वर्ष 1976–77 से 1978–79 तक उत्तर प्रदेश के इलाहाबाद मण्डल की जलोढ मिट्टियों से प्राप्त बड़ी संख्या में नमूनों के विश्लेषित परिणामों को विकास खण्डवार विभिन्न उर्वरता स्तरों में क्रमवद्ध किया गया हैं और इस प्रकार विकास खण्डवार जो उर्वरता स्तर प्राप्त हुये वे जनपदवार उर्वरता स्तर की तुलना में अधिक सार्थक एवं व्यावहारिक हैं।

प्रयोगात्मक

मण्डल के पाँच जनपदों से प्रत्येक जनपद की कृषि योग्य भूमि की ऊपरी 0-15 से०मी० सतह से मृदा नमूने एकत्र किये गये। नमूनों को छाया में सुखाकर चूर्ण किया गया तथा 2 मि०मी० व्यास वाली छलनी से छनवाया गया। छनी हुई मिट्टी विश्लेषण हेतु ली गई। प्रत्येक नमूना का विश्लेषण उपलब्ध प्रमुख पोषक तत्वों जैसे नाइट्रोजन, फास्फोरस एवं पोटेशियम के साथ ही इन तत्वों को प्रभावित करने वाले मृदाविन्यास, मृदा पी० एच० एवं लवणीयता हेतु किया गया। नाइट्रोजन का विश्लेषण जैविक कार्बन

के रूप में वाकले एवं ब्लैक (1950) की विधि द्वारा किया गया। उपलब्ध फास्फोरस का विश्लेषण ओल्सन विधि से एवं उपलब्ध पोटेशियम का अमोनियम ऐसीटेट द्वारा उपचारित कर फ्लेमफोटोमीटर विधि से किया गया। मृदा पी-एच० का परीक्षण पी-एच० मापी द्वारा 1 : 2·5 मृदा-जल घोल में किया गया।

मृदा नमूनों के विश्लेषण से प्राप्त परिणामों के प्रतिशत आधार पर पोषक तत्व सूचकांक (Nutrient Index) ज्ञात करके इलाहाबाद मण्डल की मृदाओं को विकास खण्डवार विभिन्न उर्वरता स्तरों में रखा गया[2]। इसी प्रकार मृदा उर्वरता का वर्गीकरण (पार्कर इत्यादि[3], रामामूर्ति एवं बजाज[4]) पाँच उर्वरता स्तरों–अतिन्यून, न्यून, मध्यम, मध्यम उच्च एवं उच्च–में किया गया। पोषक तत्व सूचकांक की गणना प्रत्येक विकास खण्ड से बड़ी संख्या में प्राप्त मृदा नमूनों के परिणामों के आधार पर की गई। केवल कुछ विकास खण्डों में ही नमूनों की संख्या अपेक्षाकृत कम रही।

परिणाम तथा विवेचना

मृदा उर्वरता स्तर : 98 प्रतिशत से अधिक नमूनों का मृदा पी० एच० सामान्य (6·0 से 8·5 तक) पाया गया यद्यपि उपरोक्त प्रतिशत मान विभिन्न जनपदों में भिन्न-भिन्न है। नाइट्रोजन का स्तर सभी जनपदों में न्यून पाया गया।

पोटेशियम का स्तर इलाहाबाद एवं कानपुर जनपद के सभी विकास खण्डों में उच्च, फर्रुखाबाद जनपद में मध्यम-उच्च से उच्च एवं फतेहपुर जनपद में मध्यम-उच्च पाया गया। केवल इटावा जनपद के अधिकांश विकास खण्डों का स्तर मध्यम पाया गया। स्पष्ट है कि इलाहाबाद मण्डल की मृदाओं में पोटेशियम प्रचुर मात्रा में उपलब्ध है।

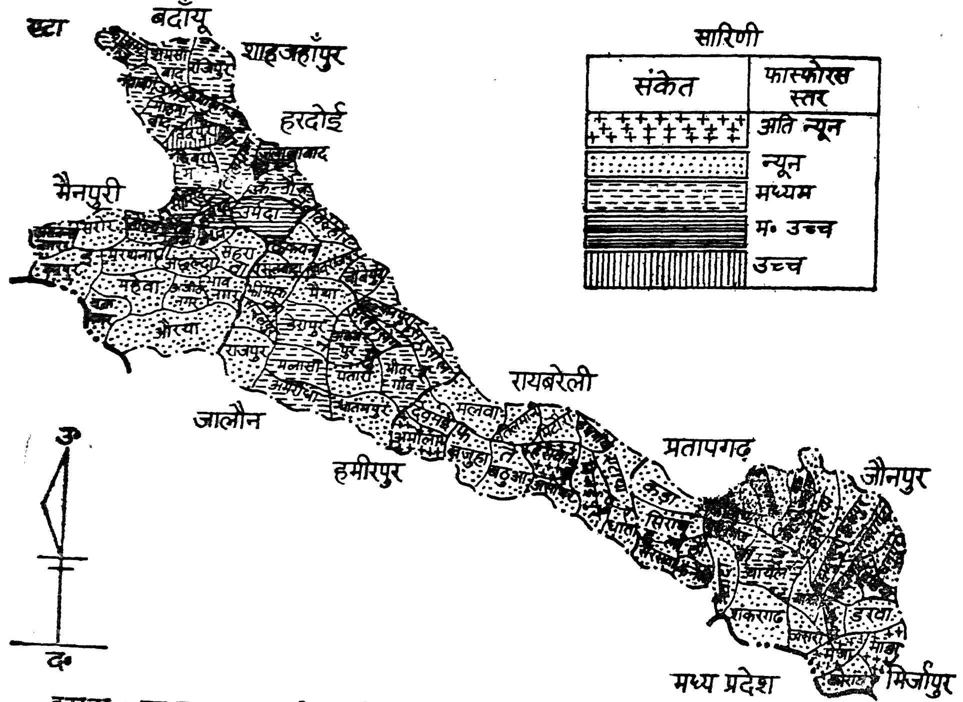
इलाहाबाद मण्डल की मृदाओं में फास्फोरस स्तर

जनपद एवं विकास खण्डवार फास्फोरस स्तर : मण्डल के फतेहपुर, इलाहाबाद, इटावा, फर्रुखाबाद, एवं कानपुर जनपदों में विभिन्न उर्वरता स्तरों के अन्तर्गत आने वाला मृदा नमूनों का प्रतिशत एवं पोषक तत्व सूचकांक विकास खण्डवार सारणी 1 में अंकित हैं। इलाहाबाद मण्डल की मृदाओं में फास्फोरस स्तर को संलग्न मानचित्र में दर्शाया गया है।

फतेहपुर : सम्पूर्ण जनपद की मृदायें फास्फोरस में न्यून पाई गईं। दो विकास खण्ड, हसवा एवं अमौली, की मृदायें अति न्यून स्तर की पाई गईं जबकि अन्य विकास खण्डों की मृदायें न्यून रहीं। इन विकास खण्डों के स्तर की सीमा भी अति न्यून से कुछ ही अधिक होने पर न्यून स्तर पा सकी। सभी विकास खण्डों का तत्व सूचकांक 1·81 एवं 2·60 के बीच रहा जो सारणी 1 से स्पष्ट है।

इलाहाबाद : जनपद के सभी विकास खण्डों की मृदायें, चायल एवं सरसवा को छोडकर, जिसकी मृदायें मध्यम श्रेणी की पाई गईं, फास्फोरस में न्यून पाई गईं। केवल एक विकास खण्ड माँडा, अति न्यून

स्तर में आया। उरवा, मेजा एवं कड़ा विकास खण्डों की सीमा भी अति न्यून से कुछ ही अधिक होने पर न्यून स्तर पा सकीं जिनका पोषक तत्व सूचकांक 2·02 से कम रहा। इन विकास खण्डों की मृदाओं में भी फास्फोरस न्यूनतम है।



इटावा : इटावा जनपद की मृदायें फास्फोरस में फतेहपुर जनपद की मृदाओं की भाँति ही न्यून स्तर की हैं। विधुना विकास खण्ड की मृदायें अति न्यून स्तर की हैं जबकि अन्य सभी विकास खण्डों की मृदायें न्यून स्तर की हैं। विकास खण्ड जसवंत नगर, औरैया, वसरेहर, बढपुरा, भाग्यनगर, सहार, ताखा ऐंखाकटरा एवं अर्जीतमल सीमांत रूप से अति न्यून स्तर के पाये गये (तत्व सूचकांक 2.04 से कम)। इस प्रकार वास्तव में अछल्ला, महेवा, चक्रनगर एवं मर्थना विकास खण्ड ही न्यून उर्वरता स्तर के कहे जा सकते हैं।

मेहरोत्रा एवं सिंह[5] तथा घोष एवं हसन[6] ने इलाहाबाद, फतेहपुर एवं इटावा जनपद की मृदाओं का फास्फोरस स्तर न्यून पाया।

फर्रुखाबाद : फर्रुखाबाद जनपद की मृदाओं में फास्फोरस स्तर अन्य जनपदों की तुलना में समुचित पाया गया। बढपुर विकास खण्ड की मृदाओं में, नगर के निकट स्थित होने के कारण, फास्फोरस स्तर उच्च है। कमालगंज, कायमगंज, शमसाबाद, छिबरामऊ, तालग्राम, कन्नौज एवं राजेपुर की मृदायें उपलब्ध फास्फोरस में मध्यम-उच्च स्तर की पाई गई। सस्योत्पादन हेतु मध्यम-उच्च एवं उच्च उर्वरता स्तर की मृदाओं में फास्फोरस देने की आवश्यकता कम होती है। सम्पूर्ण जनपद फास्फोरस स्तर में मध्यम श्रेणी में आता है तथा इसी प्रकार की उपलब्धि घोष एवं हसन[6] को फर्रुखाबाद जनपद में फास्फोरस स्तर का अध्ययन करने पर प्राप्त हुई।

सारणी 1

फतेहपुर जनपद की मृदाओं में फास्फोरस स्तर

क्र० सं०	विकास खन्ड का नाम	विश्लेषित मृदा नमूनों की संख्या	उपलब्ध फास्फोरस स्तर फास्फोरस स्तर में नमूनों का प्रतिशत					पोषक सूचकांक
			अति न्यून	न्यून	मध्यम	म०उच्च	उच्च	
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	**फतेहपुर जनपद**							
1.	बहुआ	2054	37	40	16	4	3	1·96
2.	खजुहा	3166	46	31	14	4	5	1·91
3.	देवमई	1606	42	32	14	6	6	2·02
4.	हसवां	2004	53	30	12	2	3	1·72
5.	ऐंराया	2670	33	41	17	3	6	2·08
6.	तिलयानी	1826	37	33	19	4	7	2·11
7.	भिटौरा	2131	39	36	14	3	8	2·05
8.	मलवा	2722	42	31	20	3	4	1·96
9.	अमौली	2332	52	34	11	1	2	1·67
10.	धाता	2086	47	31	13	4	5	1·89
11.	विजईपुर	1313	42	29	19	8	7	2·04
12.	हथगाँव	1897	36	33	22	4	5	2·09
13.	असोथर	1495	48	29	13	4	6	1·91
	समस्त फतेहपुर जनपद	27,302	43	33	16	3	5	1·94
2.	**इलाहाबाद जनपद**							
1.	नेवादा	1753	35	41	11	8	5	2·07
2.	धानूपुर	2016	23	36	20	14	7	2·46
3.	होलागढ़	1392	35	34	21	3	7	2·13
4.	चायल	1033	7	49	20	21	3	2·64
5.	हँड़िया	2084	26	34	16	17	7	2·45
6.	मंझनपुर	2090	28	45	17	8	2	2·11

1	2	3	4	5	6	7	8	9
7.	फूलपुर	2888	27	34	24	10	5	2·32
8.	मऊआइमा	1788	28	41	15	12	4	2·23
9.	बहादुरपुर	2428	28	46	18	5	3	2·09
10.	मेजा	1413	35	46	16	2	1	1·88
11.	सैदाबाद	2324	28	43	17	7	5	2·18
12.	वहेरिया	1888	24	35	17	17	7	2·48
13.	कनैली	1445	28	53	13	4	2	1·99
14,	शंकरगढ़	2101	42	35	10	7	6	2·00
15.	कड़ा	1367	27	56	9	4	4	2·02
16.	मांडा	1398	46	39	10	4	1	1·75
17.	कोरांव	2256	25	44	20	8	3	2·20
18.	सोरांव	1978	22	39	28	7	4	2·32
19.	प्रतापपुर	2291	33	36	16	9	6	2·19
20.	कौड़ियार	2185	29	39	17	12	3	2·21
21.	सरसवां	2111	27	33	25	12	3	3·20
22.	मूरतगंज	2062	35	32	18	12	3	2·16
23.	उरवा	1325	34	50	11	4	1	1·88
24.	सिराथू	2735	27	41	17	9	6	2·26
25.	चाका	501	18	45	24	9	4	2·36
26.	करछना	875	32	39	17	6	6	2·15
27.	जसरा	712	25	30	30	12	3	2·38
समस्त इलाहाबाद जनपद		48439	29	40	18	9	4	2·19

3. फर्रुखाबाद जनपद

1.	बढ़पुर	3178	11	24	18	13	34	4·35
2.	कमाल गंज	2715	13	20	16	12	38	3·39
3.	कायम गंज	2294	10	31	22	7	30	3·16
4.	नवाब गंज	1339	10	23	24	12	31	3·31

1	2	3	4	5	6	7	8	9
5.	शमसाबाद	3235	12	24	20	14	30	3·26
6.	मोहम्मदाबाद	2500	11	25	19	11	34	3.32
7.	छिनरामऊ	4880	14	30	19	11	26	3·05
8.	हसेरन	1571	19	27	24	13	17	2·82
9.	सौरिख	1788	12	23	15	12	38	3·41
10.	तालग्राम	1823	13	34	22	8	23	2·94
11.	कन्नौज	4805	15	26	19	12	28	3·12
12.	राजेपुर	2046	15	26	25	8	26	3·04
13.	जलालाबाद	2198	8	17	18	12	45	3·69
14.	उर्मदा	2745	9	20	20	15	36	3·49
समस्त फरूर्खाबाद जनपद		37117	12	25	19	11	33	3·28

4. कानपुर जनपद

1.	मैथा	3004	20	38	27	8	7	2·44
2.	राजेपुर	2273	13	40	30	9	8	2·59
3.	घाटमपुर	4469	18	38	29	8	7	2·48
4.	पतारा	2088	19	36	27	7	11	2·55
5.	कल्यानपुर	2690	12	40	28	10	10	2·66
6.	चौबेपुर	2176	10	37	23	8	22	2·95
7.	बिल्हौर	2832	43	22	8	12	–	2·59
8.	ककंवन	1194	14	46	26	9	5	2·45
9.	रसूलाबाद	2312	18	41	24	8	8	2·44
10.	अकबरपुर	3109	16	38	22	10	14	2·68
11.	डेरापुर	1842	13	27	25	9	26	3·08
12.	भीभंक	2118	14	44	27	11	4	2·47
13.	अमरौधा	2605	9	41	30	12	8	2·69
14.	सन्दलपुर	1374	16	41	24	10	9	2·55
15.	सरसौल	2753	15	39	27	9	10	2·61

1	2	3	4	5	6	7	8	9
16.	भीतर गाँव	1795	13	39	26	11	11	2·68
17.	सरवन खेड़ा	1542	21	39	26	9	5	2·38
18.	विधनू	2520	18	40	26	8	8	2·48
19.	शिवराज पुर	1977	23	36	24	10	7	2·42
20.	मलासा	1873	15	32	33	9	11	2·69
समस्त कानपुर जनपद		46546	16	37	23	9	15	2·70

5. इटावा जनपद

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1.	जसवन्त नगर	5993	40	43	—	2	3	1·93
2.	औरया	5172	30	54	12	2	2	1·92
3.	भरथना	2050	34	40	12	4	10	2·16
4.	बसरेहर	2830	34	46	12	2	6	2·00
5.	बढपुर	4057	38	45	11	2	4	1·89
6.	विधूना	3989	43	44	8	3	2	1·77
7.	भाग्य नगर	3314	37	49	10	1	3	1·84
8.	चक्र नगर	881	39	35	10	3	13	2·16
9.	सहार	2328	32	46	15	3	4	2·01
10.	तारवा	2699	44	39	8	4	5	1·87
11.	ऐरवां कटरा	1723	39	40	10	4	7	2·00
12.	अछल्दा	2070	32	50	8	2	3	2·21
13.	अजीतमल	6172	19	64	14	—	3	2·04
14.	महेवा	6341	13	39	33	11	4	2·54
समस्त इटावा जनपद		49568	32	47	14	3	4	2·02

सारणी 2

उपलब्ध फास्फोरस के विभिन्न उर्वरता स्तरों में आने वाले विकास खन्डों की संख्या

कु० सं०	जनपद	कुल विकास खन्डों की सं०	विभिन्न फास्फोरस स्तरों में आने वाले विकास खन्डों की संख्या				
			अतिन्यून	न्यून	मध्यम	म० उच्च	उच्च
1.	इलाहाबाद	27	1	24	2	–	–
2.	फतेहपुर	13	2	11	–	–	–
3.	कानपुर	20	–	13	7	–	–
4.	फर्रुखाबाद	14	–	–	9	4	1
5.	इटावा	14	1	13	–	–	–
	मंडल	88	4	61	18	4	1
	प्रतिशत	100	4·5	69·4	20·5	4·5	1·1

कानपुर : कानपुर जनपद की मृदाओं का फास्फोरस स्तर फर्रुखाबाद एवं इलाहाबाद जनपद के बीच का पाया गया जहाँ इसका स्तर सामान्य है। 60 प्रतिशत विकास खण्डों की मृदायें पोषक तत्व सूचकांक के आधार पर यद्यपि न्यून श्रेणी में आती हैं तथापि इनको सीमांत मध्यम स्तर में रखा जा सकता है (पोषक तत्व सूचकांक 2·38 से अधिक)। 2·61 से 3·40 पोषक तत्व सूचकांक की मृदायें मध्यम उर्वरता स्तर में आती हैं। जनपद के अन्य विकास खण्डों की मृदाओं का स्तर मध्यम है।

सम्पूर्ण मण्डल का फास्फोरस उर्वरता स्तर : सम्पूर्ण मण्डल के वर्ष 1976-77 से 1978-79 तक 2,08,972 मृदा नमूनों के विश्लेषित परिणामों (सारणी 2) से विदित है कि मण्डल के 88 विकास खण्डों में से 73·9 प्रतिशत विकास खण्ड न्यून स्तर, 25·0 प्रतिशत विकास मध्यम स्तर एवं केवल 1·1 प्रतिशत विकास खण्ड फास्फोरस के उच्च उर्वरता स्तर में पाये गये। अतः सिद्ध है कि मण्डल के तीन-चौथाई विकास खण्डों में फसलों से समुचित उत्पादन लेने हेतु फास्फोरस देना अति आवश्यक है तथा जिन विकास खण्डों का स्तर मध्यम भी है वहाँ भी उचित सस्योत्पादन हेतु फास्फोरस डालना आवश्यक है। मेहरोत्रा एवं तरजीत सिंह[5] ने उत्तर प्रदेश के 39 मैदानी जनपदों में से 27 जनपदों की मिट्टियों में फास्फोरस का स्तर न्यून, 12 जनपदों का मध्यम से आँशिक मध्यम पाया। इसी प्रकार घोष तथा हसन[6] द्वारा भी उत्तर प्रदेश के 75 प्रतिशत एवं 25 प्रतिशत जनपद क्रमशः न्यून एवं मध्यम फास्फोरस स्तर के पाये गये उद्यपि उस समय इनके द्वारा विश्लेषित न्यादर्शों की संख्या कम थी। पूर्व कार्यकर्ताओं द्वारा ज्ञात मृदा उर्वरता की तीन श्रेणियों में वर्गीकरण तथा प्रस्तुत अध्ययन में अपेक्षाकृत बहुत अधिक मृदा नमूनों से प्राप्त निष्कर्षों में अत्यधिक समानता है। अधिक संख्या में मृदा न्यादर्श एकत्र कराकर विश्लेषण किया गया है अतः इस अध्ययन पर आधारित गंगा जमुना की जलोढ मिट्टियों का फास्फोरस स्तर अधिक सार्थक है।

निर्देश

1. उत्तर प्रदेश में परीक्षण मृदा परीक्षण कार्यक्रम पर एक झलक, 1979 कृषि विभाग, उत्तर प्रदेश
2. मुहर, जी० आर०, दत्त, एन० पी०, शंकर सुब्रामनी, एच०, लिली, वी० के० तथा डैनहाऊ, आर० एल०, Soil Testing in India, यू० एस० ए० आई० डी०, नई दिल्ली, 1965
3. पार्कर, एफ० डब्लू० तथा अन्य, **एग्रोनोमी जर्नल**, 1951, **43**, 105–112
4. रामामूर्ती, बी० तथा बजाज, जे० सी०, **खाद पत्रिका**, 1969, **14** (8) , 25
5. मेहरोत्रा, सी० एल० तथा तरजीत सिंह, **खाद पत्रिका**, सितम्बर 1969
6. घोष, ए० बी० तथा हसन, रहउल, **इण्डियन सोसा० स्वाइल साइंस बुलेटिन**, 1979, **12**, 1–8

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 4, October, 1980, Pages 375-381

कार्बोनेट-बाइकार्बोनेट माध्यम के फेरस आयनों की पोलैरोग्राफी

ओ० पी० अग्रवाल तथा रजनी
महर्षि दयानन्द विश्वविद्यालय, रोहतक

[प्राप्त—जनवरी 11, 1980]

सारांश

Fe^{2+} दो कैथोडी तरंगें देता है और दोनों 1 M Na_2CO_3+1 M $NaHCO_3$ माध्यम में अनुत्क्रमणीय होती हैं। संतृप्त कैलोमल इलेक्ट्रोड (S.C.E.) के प्रति प्रेक्षित तत्संबंधी अर्ध-तरंग-विभव −0.48V तथा −1.58V हैं। दोनों तरंगों की ऊँचाइयाँ Fe^{2+} की सान्द्रता पर पूर्णतः निर्भर नहीं करतीं। थायोमैलिक अम्ल की उपस्थिति में, जब Fe^{2+} : थायोमैलिक अम्ल की सान्द्रता का अनुपात 1:1 होता है, दो इलेक्ट्रॉन अन्तर प्रदर्शित करती हुई प्रथम तरंग उत्क्रमणीय तथा Fe^{2+} की सान्द्रता पर पूर्णतः निर्भर हो जाती है। $E_{1/2}$ भी और अधिक ऋणात्मक विभव −0·54V की ओर विस्थापित हो जाता है। वैश्लेषिक उद्देश्यों के लिए तरंग आदर्श पाई गई है। I_D तथा D की गणना की गई है और तत्संबंधी मान हैं :

$$I_D=1.284, \quad D=1.1186\times10^{-6}\ cm^2/sec.$$

थायोमैलिक अम्ल की उपस्थिति द्वितीय तरंग पर प्रभाव नहीं डालती। यह तरंग असंगत प्रतीत होती है और इसका उपयोग वैश्लेषिक कार्य के लिए नहीं किया जा सकता है।

Abstract

Polarography of ferrous ion in carbonate-bicarbonate medium. *By* O. P. Agrawal and Rajani, Department of Chemistry, Maharshi Dayanand University, Rohtak.

Fe^{2+} gives two cathodic waves, both irreversible, in 1 M Na_2CO_3+1 M $NaHCO_3$ medium. The respective half-wave-potential, observed against S.C.E. are −0.48 V, and −1.58 V. The heights of both the waves do not fully depend on the concentration of Fe^{2+}. However, in the presence of thiomalic acid, when the Fe^{2+}, thiomalic acid concentration ratio is 1:1, the first wave becomes reversible showing two-electron change, and completely dependent on the concentration of Fe^{2+}, the

$E_{1/2}$ also shifts to more negative potential i.e. -0.54 V. The wave has been found ideal for analytical purposes. The I_D and D have been calculated and the respective values are:—

$$I_D=1.284, \quad D=1.1186\times10^{-6}\ cm^2/sec.$$

The presence of thiomalic acid does not affect the second wave. This wave seems to be an anomalous one and cannot be exploited for analytical work.

कई माध्यमों में फेरस आयनों के पोलैरोग्राफीय आचरण का अध्ययन किया गया है [1–12]। लेखकों ने इसी का अध्ययन थायोमैलिक अम्ल (मरकैप्टो सक्सिनिक अम्ल) की उपस्थिति तथा अनुपस्थिति में 1M Na_2CO_3 + 1M $NaHCO_3$ माध्यम में किया है।

प्रयोगात्मक

फेरस आयन के रूप में, सल्फ्यूरिक अम्ल की थोड़ी मात्रा युक्त फेरस अमोनियम सल्फेट का जलीय विलयन प्रयोग किया गया। प्रयुक्त सभी पदार्थ वैश्लेषिक श्रेणी के थे और विलयन दुबारा आसुत जल में बनाये गये थे। बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड (d.m.e.) में प्रयुक्त पारद पहले नाइट्रिक अम्ल द्वारा शोधित किया गया और फिर दो बार आसवित किया गया।

सभी पोलैरोग्राफीय अन्वेषणों में तोशनीवाल निर्मित हस्तचालित पोलैरोग्राफ प्रयोग किया गया। मानक इलेक्ट्रोड के रूप में संतृप्त कैलोमेल इलेक्ट्रोड प्रयोग किया गया। प्रयुक्त बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड सेल के अभिलक्षण निम्नवत् थे :

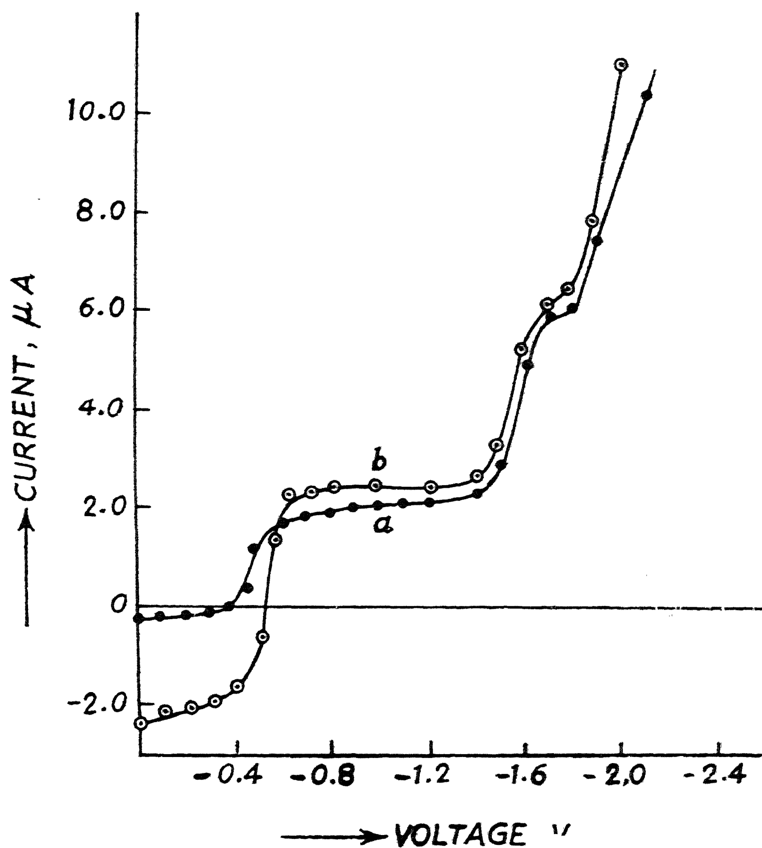
$$m=1.837\ mg.\ sec^{-1},\ t=4.8\ sec,\ h=40\ cm, m^{2/3}\,t^{1/6}=1.947\ mg^{2/3}\ sec^{-1/2}$$

धारा विभव वक्र 30°C पर लिए गये। सभी अन्वेषणों के दौरान शोधित नाइट्रोजन का वातावरण रखा गया।

परिणाम तथा विवेचना

आधार इलेक्ट्रोड के रूप में 1M Na_2CO_3 + 1M $NaHCO_3$ युक्त जलीय माध्यम में Fe^{2+} का अध्ययन किया गया है। दो अनुत्क्रमणीय कैथोडी तरंगें, एक – 0.4 V तथा दूसरी –1.4 V पर प्रारम्भ होती हुई देखी जाती हैं (चित्र 1a)। तत्संबंधी अर्धतरंग विभव ($E_{1/2}$) – 0.48 V तथा –1.58 V हैं। दोनों तरंगें धात्विक आयन (Fe^{2+}) पर पूर्णतः निर्भर नहीं करती हैं। प्रथम तरंग सुनिश्चित (स्पष्ट) होती है परन्तु द्वितीय तरंग एक बहुत छोटे सीमांत क्षेत्र के साथ अस्पष्ट (ill-defined) होती है। कोई भी तरंग Fe^{2+} के पोलैरोग्राफीय मात्रात्मक आकलन के लिये उपयुक्त नहीं होती हैं। परन्तु कुछ थायोमैलिक अम्ल विलयन मिलाने पर जिससे Fe^{2+} तथा अम्ल का अनुपात 1:1 हो जाये, प्रथम तरंग दो इलेक्ट्रॉन अन्तर प्रदर्शित करती हुई उत्क्रमणीय हो जाती है। $E_{1/2}$, –0.54 V वाले अधिक ऋणात्मक विभव की ओर विस्थापित हो जाता है और तरंग की ऊँचाई सेल के विलयन में उपस्थित Fe^{2+} आयनों के

सान्द्रण के समानुपाती हो जाती है। तरंग पूर्णतः विसरण-नियंत्रित होती है और निम्न सान्द्रणों पर इसका उपयोग Fe^{2+} आयनों के पोलैरोग्राफीय आकलन के लिए किया जा सकता है (सारणी 1)।



चित्र 1

थायोमैलिक अम्ल मिलाने से द्वितीय तरंग अप्रभावित रहती है। यह अस्पष्ट, अनुत्क्रमणीय तथा Fe^{2+} सान्द्रण के स्वतंत्र रहती है (सारणी 2); $E_{1/2}$ भी अपरिवर्तित रहता है।

सारणी 1

थायोमैलिक अम्ल (TSH) की अनुपस्थिति तथा उपस्थिति में Fe^{2+} की प्रथम कैथोडी तरंग के लिए i_1/C मान

Fe^{2+} का सान्द्रण $M \times 10^3$ (C)	TSH की अनुपस्थिति में −1.0 वोल्ट पर सीमांत धारा (i1)(μA)	i1/C	TSH की उपस्थिति में -1.0 वोल्ट पर सीमांत धारा (i1) Fe^{2+}:TSH 1:1(μA)	i1/C
1·00	1·90	1·90	2·03	2·03
0·75	1·61	2·15	1·53	2·04
0·50	1·13	2·26	1·01	2·02
0·25	0·74	2·96	0·505	2·02

सारणी 2

TSH की अनुपस्थिति तथा उपस्थिति में द्वितीय कैथोडी तरंग के लिये i1/C का मान

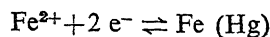
Fe^{2+} का सान्द्रण M × 10^3 (C)	TSH की अनुपस्थिति में −1·75 वोल्ट पर सीमांत धारा (i1)(μA)	i1/C	TSH की उपस्थिति में-1·75 वोल्ट पर सीमांत धारा (i1) Fe^{2+} : TSH 1:1 (μA)	i1/C
1·00	5·63	5·63	5·86	5·86
0·75	4·53	5·90	4·485	5·98
0·50	3·20	6·40	3·19	6·38
0·25	1·74	6·96	1·705	6·82

ऐसा भी ज्ञात है कि थायोमैलिक अम्ल अधिक धनात्मक विभवों पर ऐनोडी तरंग देता है[13–16]। यह ऐनोडी तरंग, विलयन में Fe^{2+} की उपस्थिति द्वारा लगभग पूर्णतः अप्रभावित रहती है, विसरण धारा भी केवल लेशमात्र कम होती हैं। सेल में Fe^{2+} के विलयन में थायोमैलिक अम्ल मिलाने से यद्यपि एक हल्का गुलाबी रंग प्रकट हो जाता है।

जब थायोमैलिक अम्ल कम मात्राओं में मिलाया जाता है जिससे Fe^{2+} : TSH सान्द्रण अनुपात 1:1 तक नहीं पहुँचता है तो सेल विलयन में धात्विक आयन के सान्द्रण के प्रति प्रथम कैथोडी तरंग की ऊँचाई की समानुपातिकता प्राप्त नहीं होती है। परन्तु उच्चतर Fe^{2+} : TSH अनुपात (1:2 अथवा 1:3) की उपस्थिति में समानुपातिकता उतनी ही अच्छी बनी रहती है जितनी 1:1 अनुपात में। प्रथम तरंग (Fe^{2+} : TSH 1:1) के लिए विसरण धारा स्थिरांक और विसरित होने वाले फेरस स्पीशीज के विसरण गुणांक की गणना की गई है; तत्संबंधित मान हैं :

$$I_D = 1{\cdot}284; \quad D = 1{\cdot}1186 \times 10^{-6}\ cm^2/sec$$

जैसा कि पहले बताया गया है, TSH की उपस्थिति में (Fe^{2+} : TSH 1:1), प्रथम कैथोडी तरंग Fe^{2+} आयनों के पोलैरोग्राफीय निर्धारण के लिये उपयोग की जा सकती है। तरंग के लिये इलेक्ट्रोड अभिक्रिया निम्नवत् लिखी जा सकती है।



$$Fe^{2+} + 2\,e^- \rightleftharpoons Fe\ (Hg)$$

यह संभव हो सकता है कि TSH की उपस्थिति में Fe^{2+} आयन बिन्दुपाती पारद इलेक्ट्रोड की सतह पर, इस अम्ल के साथ संकरित स्पीशीज के रूप में विसरित होता है। थायोमैलिक अम्ल कई धात्विक आयनों के साथ संकर बनाता है[17–43]। TSH मिलाने पर रंग का प्रकट होना तथा $E_{1/2}$ का और अधिक ऋणात्मक विभव की ओर विस्थापन इस दिशा की ओर संकेत करते हैं। परन्तु संकर दुर्बल प्रतीत होता है जो संभवतः वास्तविक इलेक्ट्रोड अभिक्रिया होने के पूर्व ही वियोजित हो जाता है। यह Fe^{2+} आयनों की

उपस्थिति में भी धारा मान में केवल थोड़े अंतर के साथ TSH की ऐनोडी तरंग की उपस्थिति को स्पष्ट करेगा।

द्वितीय तरंग असंगत प्रतीत होती है जिसमें कोई उष्मागतिक अथवा रासायनिक सार्थकता नहीं होती। ऐसी तरंगें बहुधा देखी गई हैं[44-45]।

निर्देश

1. ब्रेडा, माइटीज, रेड्डी तथा वेस्ट, Anal. Chim. Acta, 1956, **14**, 390
2. डोलेजाल तथा नोवक, Chem. Listy, 1958 **52**, 582, Collection Czechoslov. Chem. Communs., 1959, **24**, 2182
3. वही, वही, 1958, **52**, 2060; 1959, **24**, 2291
4. हिबिट्स, मेंके तथा डेविस, Tech. Pub. Apex-405, जनरल इलेक्ट्रिक कं०, सिनसिनाटी, ओहायो (अगस्त 11, 1958)
5. डोनो, मोरिनागा तथा नोमुरा, Bull. Nagoya Inst. Technol., 1954 **7**, 156.
6. वही, वही, 1955, **8**, 165
7. बौमगार्टान, कवर, होफास, कार्प, पिंचेज तथा माइटीज, Anal. Chim. Acta. 1959, **20**, 397
8. ग्रेनियर तथा माइटीज, Anal Chim. Acta, 1956, **14**, 482
9. वेस्ट, डीन तथा ब्रेडा, Collection Czechoslov. Chem. Communs., 1948, **13**, 1
10. जोन्स, Anal Chim. Acta, 1952, **7**, 578
11. कैथेरिनो तथा माइटीज, Anal. Chim. Acta, 1960, **23**, 57
12. माइटीज, एल०, Polarographic techniques, द्वितीय संकस्करण, इंटरसाइंस पब्लिशर्स, न्यूयार्क, 1965, पृष्ठ 626, 647, 556
13. कपूर, आर०सी० तथा तिवारी, एस०के०. **प्रोसी० नेश०एके० साइंस** (इंडिया), 1959, A **28**, 52
14. वही, वही, 1959, A **28**, 272
15. वही, वही, 1959, A **28**, 278
16. सक्सेना, आर० एस० तथा गुप्ता, के० सी०, Electrochim Acta., 1968, **13** (8), 1749-56 (Eng.)
17. सिनहा, एस० सी०, जैन, पी० सी० तथा निगम, एच० एल०, Curr. Sci., 1967, **36** (12), 321-22

18. पोर्टर, एल० जे०, पेरिन, डुग्लास, डी०, **आस्ट्रे० जर्न० केमि०**, 1969, **22** (1), 267-70

19. सर्ज कम्वेट, मारिस एस्टीने तथा क्लाडे रासी C. R. Acad. Sci., Paris, Ser. C. 1966, **263** (21) 1277-8

20. सत्य प्रकाश, श्रीवास्तव, पी० सी०, कुमार, ए० एन०, निगम, एच० एल०, J. Electrochem. Soc. India, 1971, **20** (3), 101-105

21. सक्सेना, आर० एस०, गुप्ता, के० सी० तथा मित्तल, एम० एल०, **कनै० जर्न० केमि०** 1968, **46**, 311-15

22. जोशी, जे० डी०, पंचाल, बी० आर०, भट्टाचार्य, पी० के०, J. Inorg. Nucl. Chem. 1973, **35** (5), 1685-8

23. गुप्ता, के० सी० तथा सक्सेना, आर० एस०, Monatsh Chem., 1973, **104** (2), 550-56

24. निगम, एच० एल०, कपूर, आर० सी०, कपूर, उमा तथा श्रीवास्तव, एस० सी०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका**, 1964, **7**(1), 43-49

25. यासुहिसा हायाशी, शिगेओ हारा तथा इसाओ मुराकी, Bunseki Kagaku, 1965, **14**(11), 1040-43

26. सिनहा, एस० सी० तथा निगम, एच० एल०, Current Sci. (India) 1966, **35** (3), 63

27. निगम, एच० एल०, कपूर, उमा तथा कपूर, आर० सी०, **विज्ञान परिषद अनु० पत्रिका** 1961, **4**, 359-62

28. फ्रैन्सिस्को बेर्मेजो मार्टिनेज तथा मारिया डेल कार्मेन माइजान मूरिनो, Quim. Anal. (Madrid) 1963, **17**, 1-4.

29. शर्मा, एच० एस०, निगम, एच० एल०, **इण्डि० जर्न० केमि०** 1975, **13** (9), 960-62

30. रेड्डी, एम० वी०, भट्टाचार्य, पी० के०, **जर्न० इण्डि० केमि० सोसा०**, 1969, **46** (11), 1058-60

31. हिल, जे० तथा मकआले, ए०, **जर्न० केमि० सोसा०** 1968, (1), 156-59

32. पांडे, एस० पी० तथा मुन्शी, के० एन०, **इण्डि० जर्न० केमि०**, 1975, **13** (1), 91

33. निगम, एच० एल०, कपूर, आर०सी०, कपूर, उमा तथा श्रीवास्तव, एस० सी०, **इण्डियन० जर्न० केमि०**, 1965, **3** (10), 443-45

34. पद्मा, एस० तथा रामानुजम, यू० वी०, **इण्डियन जर्न० केमि०**, 1966, **4** (2), 91-92

35. एलिस, के० जे०, मकआले, ए०, **जर्न० केमि० सोसा० डाल्टन ट्रांजे०**, 1973, **15**, 1533-37

36. वही, **जर्न० इनआर्ग० न्यूक्लि केमि०** 1975, **37** (2), 567–72

37. फ्रैन्सिस्को त्रेमेंजो० मार्टिनेज तथा मारिया डेल कार्मेन माइजान मूरिनो, Inform. Quim. Anal. (Madrid), 1964, **18** (1), 7-11, 20

38. लावेलर, डी० के० तथा सुलिवान, जे० सी०, इ्वाश, ई०, Inorg. Chem. 1973, **12** (6), 1440-42

39. निगम, एच० एल०, कपूर, आर० सी०, कपूर, उमा तथा श्रीवास्तव, एस० सी०, **इण्डि० जर्न० केमि०**, 1965, **3** (12), 527-29

40. अम्बुलकर, आर० एस० तथा मुंशी, के० एन०, **इण्डि० जर्न० केमि०**, 1976, **14** A (6), 424-27

41. शर्मा, एच० एस० तथा निगम, एच० एल०, **इण्डि० जर्न० केमि०**, 1976, **14** A (6), 410-12

42. पंचाल, बी० आर० तथा भट्टाचार्य, पी० के०, J. Inorg. Nucl. Chem. 1972, **34** (12), 3932-35

43. वही, **इण्डि० जर्न० केमि०**, 1973, **11** (4), 394-5

44. माइटीज, एल०, Adarographic techniques, द्वितीय संस्करण, इंटरसाइंस पब्लिशर्स न्यूयार्क, 1965, पृष्ठ 308.

45. मुलेर, ओ० एच०, J. Biol. Chem., 1942, **145**, 425

Vijnana Parishad Anusandhan Patrika
Vol. 23, No. 4, October, 1980, Pages 383-389

फ्लोराइड आयन इलेक्ट्रोड द्वारा फ्लोराइड आयनों के निश्चयन में हाइड्रोजन आयन सान्द्रता का प्रभाव

सुधीन्द्र नाथ मिश्र

रासायनिक प्रयोगशाला, जोधपुर विश्वविद्यालय, जोधपुर

[प्राप्त—मई 5, 1979]

सारांश

अम्लीकृत सोडियम फ्लोराइड विलयन में फ्लोराइड आयन इलेक्ट्रोड की सहायता से विभिन्न फ्लोराइड प्रजातियाँ पहचानी गई हैं। फ्लोराइड आयन कम से कम तीन प्रजातियों में पाया जाता है : F^-, HF तथा HF^-_2। तीव्र अम्लीय से लेकर दुर्बल क्षारीय माध्यमों में पी-एच के अत्यधिक विस्तृत परास में फ्लोराइड आयन इलेक्ट्रोड प्रभावशाली पाया गया।

Abstract

Effect of hydrogen ion concentration on the estimation of fluoride ions by fluoride ion electrode. *By* Sudhindra Nath Misra, Chemical Laboratories, University of Jodhpur, Jodhpur.

Different fluoride species have been detected in the acidified sodium fluoride solution by means of Fluoride ion electrode. Fluoride ion exists in at least three species F^-, HF, HF^-_2. The response of fluoride ion electrode has been shown to be effective in a wide range of pH starting from strongly acidic to weakly alkaline media.

कई वर्षों तक अम्लीय विलयन में संकुल फ्लोराइड प्रजातियों की उपस्थिति विवादास्पद रही है। सियावट्टा [1,2] ने पूर्ववर्ती वैज्ञानिकों की खोजों को एकत्र करके यह सुझाव दिया है कि HF, HF^{-2} की कई प्रजातियाँ तथा $H|HF|^{+3}$ जैसी बहुलकी प्रजातियाँ विद्यमान रहती हैं। ये प्रजातियाँ निम्न प्रकार के सन्तुलन के फलस्वरूप उत्पन्न होती हैं :



$$H^+ + F^- \rightarrow HF \qquad (1)$$



$$HF + F^- \rightarrow HF^-_2 \qquad (2)$$



$$H^+ + 2HF \rightarrow H[HF]^+_2 \quad (3)$$

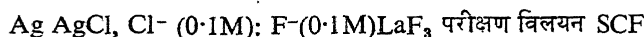


$$H^+ + 3HF \rightarrow H[HF]^+_3 \quad (4)$$

रेचनिट्ज तथा श्रीनिवासन[3] ने अम्लीय माध्यम में $H[HF]^+_2 H[HF]^+_3$ बहुलकी प्रजातियों की सम्भाव्य उपस्थिति से इन्कार किया है। उन्होंने केवल HF तथा HF^-_2 प्रजातियों के पक्ष में अपना समर्थन व्यक्त किया है।

प्रयोगात्मक

फ्लोराइड आयन वरणात्मक इलेक्ट्रोडों में से है जिसमें लैंथैनम फ्लोराइड का डिस्कनुमा यूरोपियम डोप्ड एकाकी क्रिस्टल होता है जो एपाक्सी सीमेंट द्वारा दृढ पालीविनिल क्लोराइड नली के सिरे पर सील किया रहता है। नली में NaF (0·1M) तथा NaCl (0·1M) विलयन भरे रहते हैं। क्रिस्टल एक सिरे पर दिये हुये विलयन को स्पर्श करता है और दूसरे सिरे पर आन्तरिक संदर्भ-इलेक्ट्रोड को। जब लैंथैनम फ्लोराइड क्रिस्टल के दोनों सिरों पर सक्रियता में अन्तर होता है तो सान्द्र विलयन में से फ्लोराइड आयन क्रिस्टल के आर पार गति करते हैं। किन्तु फ्लोराइड आयनों की अत्यल्प संख्या से विभव उत्पन्न हो जाता है जो फ्लोराइड आयनों के प्रवाह का विरोध करता है। सेल को निम्नवत प्रदर्शित किया जाता है।



Ag AgCl, Cl^- (0·1M): F^-(0·1M)LaF_3 परीक्षण विलयन SCF

तथा इसका e. m. f. निम्नलिखित प्रकार के नर्स्ट सम्बन्ध का पालन करता है

$$E = \epsilon - \frac{RT}{F} \ln \gamma F^{-*} \quad (5)$$

यह इलेक्ट्रोड केवल फ्लोराइड आयन सक्रियता γF^{-*} के प्रति संवेदनशील है चाहे नमूने (निदर्श) का संघटन जैसा हो। ऐसे विलयन जिनमें अबद्ध फ्लोराइड आयन रहते हैं उनमें फ्लोराइड आयन सक्रियता तथा कुल फ्लोराइड आयन सान्द्रता में निम्नलिखित सम्बन्ध पाया जाता है

$$\gamma F^{-*} = \gamma F^- \times F^-_{\text{कुल}} \quad (6)$$

जहाँ γF^- फ्लोराइड आयन का सक्रियता गुणांक है। चित्र 1 में सान्द्रता के विरुद्ध मिलीवोल्ट का आरेखन है। उपर्युक्त समीकरणों का पालन विस्तृत सान्द्रता परास में होता है। फ्लोराइड आयनों का निश्चयन पालीप्रोपिलीन बीकरों में किया गया। प्रस्तुत शोधकार्य में F^- आयन इलेक्ट्रोड (ORION INC) तथा प्रसारित स्केल F^- मीटर का व्यवहार किया गया। प्रत्येक सेट में विलयनों की सम्पूर्ण आयनिक सान्द्रता 2M KNO_3 डालकर 1M पर स्थिर रखी गई।

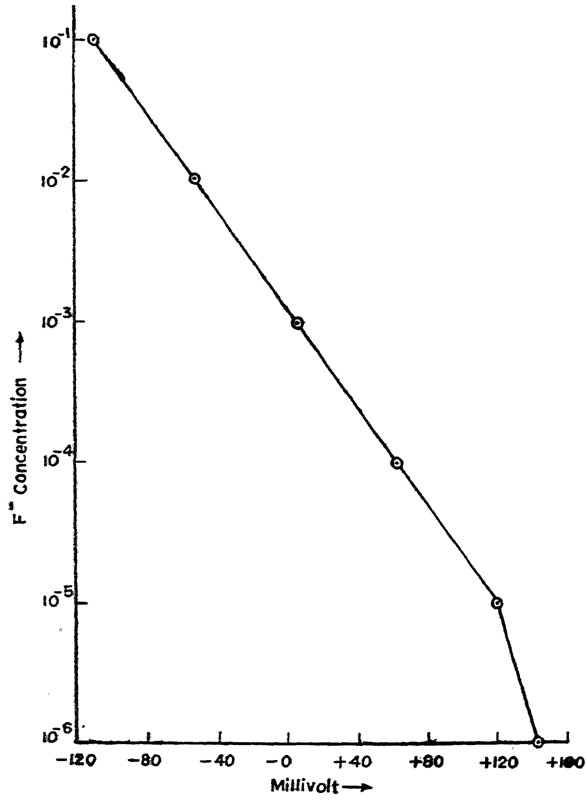
परिणाम तथा विवेचना

फ्रैंट तथा रास[4] ने फ्लोराइड आयन सान्द्रता पर हाइड्रोजन आयन सान्द्रता के प्रभाव का विस्तार से अध्ययन किया है और यह बताया है कि अपेक्षतया निम्नतर H^+ आयन सान्द्रता (पी एच 4-5) पर भी

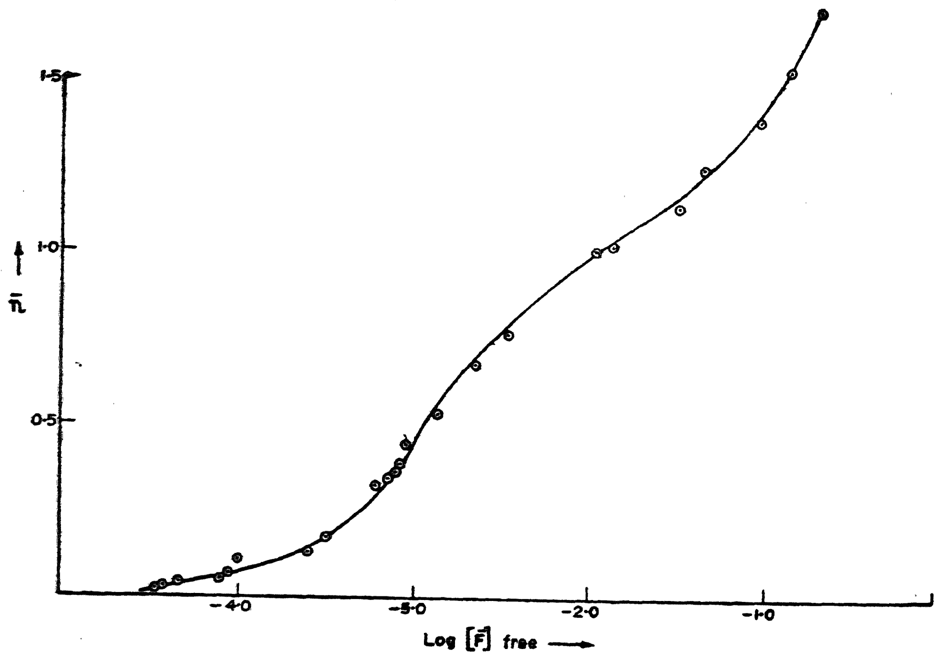
सारणी 1

कुल फ्लोराइड आयन तथा कुल हाइड्रोजन आयन सान्द्रता के विभिन्न मानों पर मुक्त फ्लोराइड आयन सांद्रता तथा प्रत्येक हाइड्रोजन आयन से बन्धित फ्लोराइड आयन की औसत संख्या

F^- Total (in Molarity)	H^+ Total (in Molarity)	F^- free (in Molarity)	$-$| log |F^-| free	$\bar{n}$
0·0010	0·04467	0·0000325	4·4881	0·02167
0·0040	0·1489	0·0000374	4·4270	0·0266
0·0040	0·1158	0·00004436	4·3530	0·0341
0·0010	0·01778	0·0000775	4·1107	0·0518
0·0040	0·0590	0·0000861	4·065	0·0663
0·0010	0·00794	0·00010	4·000	0·113
0·0040	0·0288	0·0001819	3·740	0·1325
0·0010	0·00398	0·000300	3·5228	0·176
0·0010	0·001259	0·000601	3·2211	0·317
0·0010	0·0008912	0·000700	3·1549	0·336
0·0010	0·000512	0·000805	3·0942	0·380
0·060	0·1530	0·00087	3·060	0·386
0·0010	0·000199	0·000911	3·0408	0·446
0·080	0·1496	0·001364	2·8650	0·5256
0·01	0·0116	0·002228	2·652	0·670
0·0080	0·0058	0·00361	2·442	0·7569
0·040	0·0290	0·0114	1·943	0·986
0·02	0·0058	0·01419	1·848	1·0017
0·100	0·058	0·0346	1·460	1·127
0·298	0·203	0·04677	1.330	1·237
0·535	0·2360	0·1445	0·840	1·525
0·640	0·2896	0·1477	0·8306	1·699
0·2990	0·0546	0·2062	0·6857	1·699



चित्र 1 सान्द्रता प्रभावी वक्र; कुल आयनिक साद्रता =1.0 M



चित्र 2

सारणी 2

मुक्त फ्लोराइड आयन के प्रत्येक प्रयोगात्मक सेट के लिये विभिन्न फ्लोराइड संकुल प्रजातियों के निर्माण स्थिरांक तथा प्रत्येक हाइड्रोजन आयन से बन्धित फ्लोराइड आयन की औसत संख्या

$\bar{n}$	F^-	$\log K_1$	K_1	$\log K_2$	K_2
0·113	0·00010	3·104	1270·5	0·675	4·74
0·1325	0·0001819	2·922	835·6	0·8583	7·217
0·176	0·000300	2·850	707·9	0·9294	8·51
0·317	0·000601	2·883	763·8	0·8970	7·89
0·336	0·000700	2·8526	711·6	0·9278	8·47
0·380	0·000805	2·8744	748·8	0·9052	8·04
0·386	0·000870	2·8505	708·6	0·9294	8·50
0·446	0·000911	2·9387	868·3	0·841	6·94
0·5256	0·001364	2·8958	786·6	0·8842	7·66
0·67	0·002228	2·933	851	0·8500	7·08
0·7569	0·00361	2·875	749	0·9052	8·04
0·986	0·0114	3·08	1202	0·7024	5·014
1·0017	0·01419	2·94	870	0·840	6·92
1·237	0·04677	2·90	794	0·880	7·59
1·525	0·1445	2·88	758	0·900	7·95
1·699	0·2062	2·71	512	1·0707	11·77
		$\text{Log } K_1 = 2·905$	803·5	0·8728	7·46

फ्लोराइड आयन के निश्चयन में हाइड्रोजन आयन बाधक होता है। उनका मत है कि हाइड्रोजन आयन सान्द्रता बढ़ाने पर मुक्त फ्लोराइड आयन प्रोटान के साथ संकुलित होकर HF प्रदान करते हैं।

फ्लोराइड विलयन के अम्लीय होने पर फ्लोराइड प्रजातियों के सम्बन्ध में भिन्न-भिन्न अभिमत होने के कारण यह उपयुक्त समझा गया कि फ्लोराइड आयन सक्रियता पर हाइड्रोजन आयन सान्द्रता का प्रभाव जानने के लिये क्यों न बहुचर्चित फ्लोराइड आयन इलेक्ट्रोड का उपयोग किया जाय।

सारणी 1 में कुल फ्लोराइड आयन, कुल हाइड्रोजन आयन, अबद्ध फ्लोराइड आयन तथा प्रत्येक हाइड्रोजन आयन के साथ बद्ध फ्लोराइड आयन की औसत संख्या अंकित है।

कुल फ्लोराइड आयन का परिगणन सोडियम फ्लोराइड संग्रह विलयन की सान्द्रता से और कुल अम्लता का परिणाम प्रत्येक सेट में मिलाये गये नाइट्रिक अम्ल के आयतन से किया गया। मुक्त फ्लोराइड आयन का परिगणन समीकरण (6) द्वारा किया गया। प्रत्येक सेट में विलयन की सम्पूर्ण आयनिक शक्ति को 1M पर स्थिर रखा गया जिस पर सक्रियता स्थिरांक का मान 0·5 है।

प्रेक्षण के किसी सेट में हाइड्रोजन आयन से बद्ध फ्लोराइड आयनों की औसत संख्या के लिये बेरम का संकेतन $\bar{n}$ व्यवहृत किया गया है

$$\bar{n} = \frac{[F^-]\ \text{Total} - [F^-]\ \text{Free}}{[H^+]\ \text{Total}} \tag{7}$$

सारणी 1 से स्पष्ट है कि $\bar{n}$ का मान केवल मुक्त फ्लोराइड आयन की सान्द्रता पर आश्रित है और वह कुल फ्लोराइड आयन सान्द्रता या कुल हाइड्रोजन आयन सान्द्रता से स्वतंत्र है। $\log [F^-]$ मुक्त के विरुद्ध $\bar{n}$ का आरेखन करने पर दो भंगों वाला वक्र (चित्र 2) प्राप्त होता है जिससे दो प्रजातियों का संकेत मिलता है। जिस प्रकार से मुक्त फ्लोराइड आयन सान्द्रता के साथ $\bar{n}$ का मान बर्धित होता है उससे पता चलता है कि सम्भवतः $[HF]_2^-$ का अस्तित्व है जो प्रस्तुत शोधकार्य में प्राप्त सबसे उच्च संकुल है। $\bar{n}$ ($\log [F^-]$ मुक्त) वक्र के आरेखन हेतु सिलेन की विधि[7,8] प्रयुक्त की गई। अतः $\bar{n}$ को निम्नवत आंकित किया जा सकता है

$$\bar{n} = \frac{\beta_1[F^-]\ \text{free} + 2\beta_2[F]^2\ \text{free}}{1 + \beta_1[F^-]\ \text{free} + \beta_2[F^-]^2\ \text{free}} \tag{8}$$

जहाँ

$$\beta_1 = K_1 \qquad = \frac{[HF]}{[H^+]\,[F^-]} \tag{9}$$

तथा

$$\beta_2 = K_1 K_2 \tag{10}$$

$$K_2 = \frac{[HF_2^-]}{[HF]\,[F^-]} \tag{11}$$

HF तथा HF_2^- के स्थायित्व स्थिरांकों का परिगणन बेरम की विधि[6] से किया गया। $\bar{n}=0{\cdot}5$ तथा $\bar{n}=1{\cdot}5$ पर $[F^-]$मुक्त का मान आरेख से प्राप्त करके K_1K_2 के सन्निकट मान को ज्ञात करने के लिये प्रयुक्त किया गया। K_1 का सन्निकट मान=851 तथा K_1K_2 का मान 6027 ज्ञात हुआ। K_1 तथा K_2 का मान प्राप्त करने के लिये समीकरण (8) में K_1 तथा K_1K_2 के मान $\bar{n}$ के प्रत्येक सेट तथा मुक्त फ्लोराइड आयन के लिये प्रतिस्थापित किये गये

$$K_1 = \frac{\bar{n} - (2-\bar{n})K_1K_2[F^-]^2 \text{ free}}{(1-\bar{n})[F^-]} \tag{12}$$

$$K_1K_2 = \frac{\bar{n} - (1-n)K_1[F^-] \text{ free}}{(2-n)[F]^2} \tag{13}$$

इससे K_1 का मान निकला। चूँकि K_1K_2 ज्ञात है अतः K_2 का मान सरलता से निकाला जा सकता है।

इस विधि से K_1 तथा K_2 के परिगणित मान सारणी 2 में दिये हुये हैं। K_1 तथा K_2 के माध्य मान 803·5 तथा 7·46 प्राप्त हुये। $\bar{n}$ के उच्च मान के लिये परिशुद्धि कम है किन्तु उच्च सान्द्रता में HF निर्मित होता है, जिस पर वह काँच इलेक्ट्रोड पर आक्रमण करता है। उसे देखते हुये ये मान सन्तोषप्रद हैं। फैंट तथा रास पी-एच परास 4-5 में भी फ्लोराइड आयन सक्रियता का अध्ययन नहीं कर सके। यहाँ तक कि उच्च अम्लीय विलयन में फ्लोराइड आयन इलेक्ट्रोड की अनुक्रिया घट जाती है। कुल मिलाकर प्राप्त परिणाम विश्वसनीय हैं और इनसे हमारे इस विचार की पुष्टि होती है कि फ्लोराइड संकुल प्रजातियाँ HF तथा HF^-_2 ही विद्यमान रहती है। हमें बहुलकी संकुलित फ्लोराइड प्रजातियों की उपस्थिति नहीं दिखी।

कृतज्ञता-ज्ञापन

लेखक वाशिंगटन विश्वविद्यालय, सीटल के प्रो॰ जी॰ एच॰ कैडी का कृतज्ञ है जिन्होंने शतत प्रोत्साहन दिया और अमूल्य पथ-प्रदर्शन किया। वह यू॰ एस॰ नैवल रिसर्च आफिस का आभारी है जिसने पोस्ट डाक्टरल छात्रवृत्ति प्रदान की थी।

निर्देश

1. सियावट्टा, एल॰ तथा लिबर्टी, ए॰, 'International Conference on Coordination Chemistry'. लन्दन 1959, 133
2. सियावट्टा, एल॰, Arkiv Kemi, 1963, **21**, 129
3. श्री निवासन, के॰ तथा रास, रेचिनट्ज, जी॰ ए॰, Anal. Chem., 1968, **40**, 509
4. फ्रैंट, एम॰ एस॰ तथा रास, जे॰ डब्लू॰, Science, 1966, **154**, 1553; Anal. Chem, 1968, **40**, 1169
5. फ्रैंट, एम॰ एस॰, Planting, 1967, **54**, 702
6. बेरम, जे॰, 'Metal Ammuic Formation in Aqueous Solutions', पी॰ हासे तथा सन, पब्लि॰ कोपेनहगेन, 1957
7. सिलेन, एल॰ जी॰, Chem Scand., 1956, **10**, 194
8. वही, Rec Trav. Chim., 1956, **75**, 705

लेखकों से निवेदन

1. **विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका** में वे ही अनुसन्धान लेख छापे जा सकेंगे, जो अन्यत्र न तो छपे हों और न आगे छापे जायँ। प्रत्येक लेखक से इस सहयोग की आशा की जाती है कि इसमें प्रकाशित लेखों का स्तर वही हो जो किसी राष्ट्र की वैज्ञानिक अनुसन्धान पत्रिका का होना चाहिए।

2. लेख नागरी लिपि और हिन्दी भाषा में पृष्ठ के एक ओर ही सुस्पष्ट अक्षरों में लिखे अथवा टाइप किये आने चाहिये तथा पंक्तियों के बीच में पार्श्व संशोधन के लिये उचित रिक्त स्थान होना चाहिए।

3. अंग्रेजी में भेजे गये लेखों के अनुवाद का भी कर्यालय में प्रबन्ध है। इस अनुवाद के लिये तीन रुपये प्रति मुद्रित पृष्ठ के हिसाब से पारिश्रमिक लेखक को देना होगा।

4. लेखों में साधारणतया यूरोपीय अक्षरों के साथ रोमन अंकों का व्यवहार भी किया जा सकेगा, जैसे $(K_4FeCN)_6$ अथवा $\alpha\beta_1\gamma^4$ इत्यादि। रेखाचित्रों या ग्राफों पर रोमन अंकों का भी प्रयोग हो सकता है।

5. ग्राफों और चित्रों में नागरी लिपि में दिये आदेशों के साथ यूरोपीय भाषा में भी आदेश दे देना अनुचित न होगा।

6. प्रत्येक लेख के साथ हिन्दी में और अंग्रेजी में एक संक्षिप्त सारांश (Summary) भी आना चाहिये। अंग्रेजी में दिया गया यह सारांश इतना स्पष्ट होना चाहिये कि विदेशी संक्षिप्तियों (Abstracts) में इनसे सहायता ली जा सकेंगे।

7. प्रकाशनार्थ चित्र काली इंडिया स्याही से ब्रिस्टल बोर्ड कागज पर बने आने चाहिये। इस पर अंक और अक्षर पेन्सिल से लिखे होने चाहिये। जितने आकार का चित्र छापना है, उसके दुगुने आकार के चित्र तैयार होकर आने चाहिये। चित्रों को कार्यालय में भी आर्टिस्ट से तैयार कराया जा सकता है पर उसका पारिश्रमिक लेखक को देना होगा। चौथाई मूल्य पर चित्रों के ब्लाक लेखकों के हाथ बेचे भी जा सकेंगे।

8. लेखों में निर्देश (Reference) लेख के अन्त में दिये जायँगे।
पहले व्यक्तियों के नाम, जर्नल का संक्षिप्त नाम, फिर वर्ष, फिर भाग (Volume) और अन्त में पृष्ठ संख्या। निम्न प्रकार से—
फॉवेल, आर० आर० और म्युलर, जे०, **जाइट फिजिक० केमि०**, 1928, **150**, 80।

9. प्रत्येक लेख के 50 पुनर्मुद्रण (रिप्रिन्ट) बिना मूल्य दिये जायँगे। इनके अतिरिक्त यदि और प्रतियाँ लेनी हों, तो लागत मूल्य पर मिल सकेंगी।

10. लेख "**सम्पादक, विज्ञान परिषद् अनुसन्धान पत्रिका, विज्ञान परिषद्, महर्षि दयानन्द मार्ग, इलाहाबाद-2**" इस पते पर आने चाहिये। आलोचक की सम्मति प्राप्त करके लेख प्रकाशित किये जाएँगे।

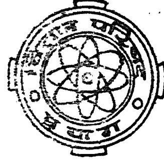
प्रबंध सम्पादक

प्रधान सम्पादक
स्वामी सत्य प्रकाश सरस्वती

Chief Editor
Swami Satya Prakash Saraswati

प्रबन्ध सम्पादक
डा० शिवगोपाल मिश्र,
एम०एस-सी०, डी०फिल०

Managing Editor
Dr. Sheo Gopal Misra,
M. Sc., D. Phil., F. N. A. Sc.



वार्षिक मूल्य : 8 रु० या 20 शि० या 4 डालर
त्रैमासिक मूल्य : 2 रु० या 5 शि० या 1 डालर

Annual Rs. 8 *or* 20 sh. *or* $ 4
Per Vol. Rs. 2 *or* 5 sh. *or* $ 1

मुद्रक :
के० राय, प्रसाद मुद्रणालय,
7 बेली एवेन्यू, प्रयाग

प्रकाशक :
विज्ञान परिषद्, प्रयाग
801229